

Μάθημα 10

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

12/10/2025

1ο Κριτήριο αξιολόγησης

1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- A2.** Τι ονομάζουμε *σύνολο τιμών* μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$;
- A3.** Να δοθεί ο ορισμός της *σύνθεσης* δύο συναρτήσεων.
- A4.** Χαρακτηρίστε με «Σωστό» ή «Λάθος» καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας:
- α') Η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ είναι αντιστρέψιμη.
 - β') Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει ελάχιστο.
 - γ') Αν f, g, h ορίζονται στο $\mathbb{R}$ με $f \circ g = f \circ h$, τότε $g = h$.
 - δ') Αν η f είναι 1-1, τότε η σύνθεση $f \circ f^{-1}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση.
 - ε') Αν η f είναι 1-1, τότε τα κοινά σημεία των f και f^{-1} , αν υπάρχουν, ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.
- B2.** Αν $f(x) = \frac{x-1}{x}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$, να βρεθεί η συνάρτηση $g \circ f$.
- B3.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2f(x) + f(-x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α') Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
 - β') Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1} .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x$.

- Γ1. Να συγκριθούν οι τιμές $f(\eta\mu 2)$ και $f(\sigma\upsilon\nu 2)$.
- Γ2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(2 + f(x)) < 1$
- Γ3. Να βρεθεί το διάστημα, στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2(x^4 + 1)$.
- Γ4. Αν μια συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $\phi(x) = h(x) + h^3(x)$ είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

- Δ1. Να αποδειχθεί ότι:

α') $f(0) = 1$

β') $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

γ') $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

- Δ2. Να αποδειχθεί ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Δ3. Αν η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ μόνο σ' ένα σημείο, να αποδειχθεί ότι:

α') Η f είναι αντιστρέψιμη.

β') $f^{-1}(y_1 \cdot y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$ για κάθε $y_1, y_2 \in f(\mathbb{R})$.

- Δ4. Αν $f(x) = e^x$, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e \cdot f(x - 2) - 1$.