

Φυλλάδιο 01 - Πραγματικές συναρτήσεις
--

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x) = \frac{\sqrt{1-|\ln x|}}{|x|+x}$, $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $h(x) = \ln(x^2 - 4|x| - 5)$, $s(x) = \sqrt{\ln(e^x + 2) - x} + \ln|x|$, $t(x) = \frac{1}{2\sin x - 1}$, $u(x) = \sqrt{2\eta\mu x - 1}$.
2. Να υπολογίσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές του k :
α) $f(x) = \frac{x^2 - x + k}{x^2 + k}$, $k \in \mathbb{R}$, β) $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \sqrt{kx^2 + 2x + k}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. α) Υπολογίστε το A_f . β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in A_f$: α) ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$ ανήκει στο A_f . β) ισχύει η σχέση $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$.
5. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους 8m σε δύο τμήματα. Με το ένα κομμάτι μήκους x m κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κομμάτι κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$ με $0m < x < 8m$.
6. Να αποδείξετε ότι ΔΕΝ υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα: $f(x) \cdot f(y) + f(x + y) + 2 = 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
7. Να αποδείξετε ότι ΔΕΝ υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα: $f(x - 1) - f(3 - x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Να βρείτε αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες όταν $f(x) = |3|x - 1| + 5x - 5|$ και $g(x) = 5|x - 1| + 3x - 3$.
9. Ομοίως για τις f , g αν $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$ και $g(x) = \begin{cases} (x - 1)\sqrt{x}, & x \geq 1 \\ -(x - 1)\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
10. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες, αν γνωρίζουμε ότι έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A_f και ισχύει η σχέση $(f + g)(x) \cdot [(f + g)(x) - 2] = 2[(f \cdot g)(x) - 1]$ για κάθε $x \in A_f$.
11. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και g έχουν τύπους $(f \circ g)(x) = \ln(e^x + 2)$ και $g(x) = x - 1$.
12. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και g έχουν τύπους $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $g(x) = \sin x$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ποιο είναι το ελάχιστο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει η f ;
13. Να βρείτε τη συνάρτηση g αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και f έχουν τύπους $(f \circ g)(x) = \ln(e^x + 2)$ και $f(x) = x - 2$.
14. Να βρείτε τη συνάρτηση g αν γνωρίζετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και f έχουν τύπους $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$ και $f(x) = e^x + 1$ με $x > 0$.
15. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς a και b ώστε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ να είναι ίσες, αν $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = ax + b$.
16. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 3x + k$. Αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ και ότι $f \circ g = g \circ f$ να αποδείξετε ότι $k = 1$.

17. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f(f(x)) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $f(1)$.
18. Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f(x+y) - g(x-y) = 4xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .
19. Να αποδείξετε ότι ενώ δεν διέρχονται όλες οι περιττές συναρτήσεις από την αρχή των αξόνων, κάθε περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
20. Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με το πεδίο ορισμού A να είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο συναρτήσεων, των οποίων η μία να είναι άρτια και η άλλη περιττή.
21. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι η συνάρτηση είναι περιττή.
22. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) + f(-x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι η συνάρτηση είναι περιττή.
23. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + x$ είναι περιττή.
24. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x < 0$, να βρείτε τον τύπο της f για $x < 0$.
25. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια με την ιδιότητα $f(x) + xf(x^2) = x^4 + x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .
26. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln - kx + k - 1$ με $k \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f διέρχεται από σταθερό σημείο (για κάθε $k \in \mathbb{R}$).
27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (k-2)x + 2k + 1$ με $k \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από σταθερό σημείο.
28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - kx + 1$ με $k \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από σταθερό σημείο.
29. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = \ln(ex - e)$, $g(x) = \frac{3x+1}{x+1}$, $h(x) = |\sqrt{x-1} - 2|$.
30. Να βρείτε τη σχετική θέση των συναρτήσεων f, g όταν γνωρίζετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + g^2(x) + f(x) - g(x) - 2f(x) \cdot g(x) = 2$.
31. Βρείτε πότε η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' , αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $-f^3(x) + 5f^2(x) - 7f(x) = x^3 - 3$.
32. Βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων: $f(x) = 6 - \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$, $h(x) = \frac{|x|-1}{|x|+2}$.
33. Βρείτε τη μονοτονία των: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$, $g(x) = x - \ln(e^x + 2)$, $h(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x - 2}{e^x + 1}$.
34. Αν f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι η εξίσωση $(f \circ g)(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
35. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Υπόδειξη: εις άτοπον απαγωγή).
36. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(1-x_1) \leq f(1-x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Υπόδειξη: εις άτοπον απαγωγή).

37. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη μονοτονία της f . (Υπόδειξη: εργαστείτε με σύνθεση συναρτήσεων).
38. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
39. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα για την οποία $f(x-1) + 3f(3-x) = x+6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 1) < 2$.
40. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα με $f(0) = 0$ και $h(x) = \frac{f(x)}{e^x + x - 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h και το πρόσημό της h .
41. Αν $f(x) = 2020 + g^2(x) - 2xg(x) + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_g τέμνει την $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο.
42. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + k}{x^2 + x + 1}$ να έχει μέγιστη τιμή το 2.
43. Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \frac{2g(x)}{g^2(x) + 1}$, όπου g συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 1.
44. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 αν ισχύει $f(f(x)) = f(x) - x + 2$ και $A_f = A_{f \circ f} = \mathbb{R}$.
45. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $f(f(x)) = 2e^x - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
46. Αν η $f \circ g$ είναι 1-1 στο A , να δείξετε ότι και η g είναι 1-1 στο A .
47. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $x^2 - \sin x$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.
48. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) - 2f(x^2) + 1 = 0$ δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.
49. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(f(x)) = f^{2020}(x) + 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.