Φυλλάδιο 08 - Θεωρήματα: Rolle, Μέσης Τιμής

Περιπτώσεις στις οποίες τα χρησιμοποιούμε

	Rolle	Θ.Μ.Τ.
Να δείξω ότι η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Rolle	√	
Να δείξω ότι η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του ΘΜΤ		√
Να δείξω ότι η f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$	√	
Να δείξω ότι η f έχει εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή ΑΒ της C_f		√
Να δείξω ότι η f ικανοποιεί μία εξίσωση		√
Να δείξω ότι η f ικανοποιεί μία ανίσωση		√
Να βρω ότι υπάρχει x_0 που ικανοποιεί μία σχέση	√	√
Να δείξω ότι μία εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα	√	√
Να δείξω ότι μία εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα (με την εις άτοπον απαγωγή)	√	
Να δείξω ότι μία εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα (εφαρμόζοντας θεώρημα Rolle στην παράγουσά της)	√	
Να δείξω ότι μία εξίσωση έχει το πολύ κ ρίζες	√	
Να δείξω ότι η f είναι 1-1 (με άτοπο)	√	
Να υπολογίσω το όριο μίας συνάρτησης f (με Θ.Μ.Τ. βγάζω μια ανίσωση και μετά με εγκλωβισμό)		√
Να δείξω ότι υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το Α(α,β)	√	

Παρατηρήσεις

- μεταξύ 2 διαδοχικών ριζών της $f(x) = 0$, η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
- μεταξύ 2 διαδοχικών ριζών της $f'(x) = 0$, η f έχει το πολύ μία ρίζα. (απόδειξη με άτοπο)
- Αν η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες. (απόδειξη με άτοπο)
- Αν η $f'(x) = 0$ ΔΕΝ έχει ρίζα, η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα. (απόδειξη με άτοπο)
- Αν η $f'(x) = 0$ ΔΕΝ έχει ρίζα, η f είναι 1-1. (απόδειξη με άτοπο)
- Αν η $f''(x) = 0$ ΔΕΝ έχει ρίζα, η $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες. (απόδειξη με άτοπο)
- Αν η ε εφάπτεται στα σημεία Α, Β της C_f, τότε για το ξ που βρίσκω από το ΘΜΤ: $f'(\xi) = f'(x_A) = f'(x_B)$
- Αν $\alpha < \beta < \gamma$ και ξ_1, ξ_2, ξ τα σημεία που βρίσκω αν εφαρμόσω ΘΜΤ στα [α,β], [β,γ], [α,γ], τότε το ξ δεν είναι υποχρεωτικά ένα από τα ξ_1, ξ_2. Μπορεί να είναι $\xi_1 \neq \xi \neq \xi_2$.

1. Αν $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$ και $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: α) η $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα $x'x$. β) Υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x+1$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, και να τα βρείτε. Υπόδειξη: α. Για την $h(x) = f(x)-g(x)$

να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$. β. Αποδείξτε ότι η $h(x)$ έχει το πολύ δύο ρίζες. γ. Προσδιορίστε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

3. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x^2}$ και $g(x) = x^2 + 1$. Αποδείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται σε μοναδικό σημείο και βρείτε το σημείο αυτό. (Υπόδειξη: α. Δείξτε ότι η $e^y - y - 1$ έχει μία (προφανή) ρίζα β. Δείξτε ότι η $e^y - y - 1$ έχει το πολύ μία ρίζα).

4. Αν $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και ισχύει $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ με $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι: α) Για την $f(x)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$. β) Δείξτε ότι $1 < \alpha < e < \beta$.
Παρατήρηση: όταν δίνεται μία ισότητα δύο μεταβλητών $\phi(\alpha,\beta) = \psi(\alpha,\beta)$ προσπαθούμε να τη μετασχηματίσουμε σε εξίσωση της μορφής $f(\alpha) = f(\beta)$ και εφαρμόζουμε το θ. Rolle για τη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$.

5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, να αποδείξετε ότι: α) Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[1,2]$. β) Υπάρχει ξ∈ $(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη ης C_f στο σημείο $M\left((\xi, f(\xi)\right)$ να διέρχεται από το σημείο Α(3,0).

Ισοδύναμη εκφώνηση: Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ $(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη ης C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο Α(3,0).

6. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = -x + 2$ έχουν ένα, το πολύ, κοινό σημείο.

7. Να αποδείξετε ότι: α) αν $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ τότε $\frac{\beta-\alpha}{\alpha} > \ln\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\beta-\alpha}{\beta}$, β) $|\eta\mu y - \eta\mu x| < |y - x|$ για $x < y$.

8. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ α) να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$, β) υπολογίστε το $lim_{x\to+\infty}\left[f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x)\right]$.

9. Να αποδείξετε ότι: α) $\ln x < x - 1$ για $0 < x$, β) $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'\downarrow$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f'(2022) < f(2022) - f(2021) < f'(2021)$$

11. Να αποδείξετε ότι: α) $e^{\frac{\beta+\alpha}{2}} \leq \frac{e^\alpha+e^\beta}{2}$.

12. Αν $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη 2 φορές με $f''\downarrow$, να αποδείξετε ότι για $0 < x$ ισχύει: $f(\frac{x}{2}) > \frac{f(x)+f(0)}{2}$.

13. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ $(0,x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

14. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'\uparrow$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+1) + f(x+2) < f(x) + f(x+3)$$

15. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''\downarrow$ και εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ παράλληλη στον $x'x$, να αποδείξετε ότι $2f'(0) + f'(3) < 0$. Υπόδειξη: ΘΜΤ στα $[0,1]$ και$[1,3]$.

16. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (\alpha,\beta) : f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3) = 0$. Υπόδειξη: Χωρίστε το $[\alpha,\beta]$ σε τρία ίσα διαστήματα και εφαρμόστε ΘΜΤ σε αυτά.

17. Αν f παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(-2)=-2, f(2)=2$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2,2) : \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι η f έχει ρίζα $x_0 \in (-2,2)$ και εφαρμόστε ΘΜΤ στα $[-2, x_0]$, $[x_0, 2]$.

18. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι: α) υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta) : f(\xi) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta) : \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$. Υπόδειξη: α) Θ.Ε.Τ. β) εφαρμόστε ΘΜΤ στα $[\alpha,\xi], [\xi,\beta]$.

19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3-4x, & x \leq 2 \\ 8x-16, & x > 2 \end{cases}$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,4]$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (0,4)$ για τα οποία ισχύει το θεώρημα.

20. Δίνεται η f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,e]$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $f(1)+f(e)=0$ με $f(1) \neq f(e)$, να δείξετε ότι: α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $[0,e)$. β) η $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,e)$. γ) Αν $f'(e)>0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,e) : f''(\xi) > 0$.

21. Αν f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $2f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = 3$, να αποδείξετε ότι: α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\frac{1}{2}, 2) : f'(\frac{1}{\xi}) = \xi^2$. β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\frac{1}{2}, 2)$: $3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{\xi}) + 2\xi^2 = 0$.

22. Αν f ορισμένη, παραγωγίσιμη και θετική σε ένα διάστημα Δ, και η $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ ισχύει: $\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} < \frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta-\alpha} < \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$. β) Αποδείξτε ότι $\epsilon\phi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha} < \epsilon\phi\beta$ όπου $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.