Φυλλάδιο 10 - Θ. Fermat - Ακρότατα - Σύνολο τιμών

Ασκήσεις

1. Παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι παντού παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής). Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να βρείτε το σημείο M της C_f το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε: $x - y - 1 = 0$.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι το σημείο M(0,1) νήκει στην C_f και $f(x) \le x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η εφαπτομένη της C_f η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 7$ και $f(x)+x^2+x+3\sigma\upsilon\nu x \le 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει: $f(x) - \left[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right] \cdot f'(x) = 0$. Να δείξετε ότι $f(\alpha) = f(\beta)$ και να βρείτε τον τύπο της f στο $[\alpha,\beta]$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $e^{f(x)} + f(x) = x^3 + ex + 2$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - \ln x$ για την οποία το $f(1)$ αποτελεί ολικό ελάχιστο. Βρείτε το α.

8. Έστω $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, θετικοί, για τους οποίους $\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \le 3, x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\alpha\beta\gamma = 1$.

9. Έστω ότι ισχύει $\alpha^{\frac{\ln x}{x}} + \beta^{\frac{x-1}{x}} \le 2$ για κάθε $x > 0$, όπου α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι οι α, β είναι αντίστροφοι.

10. Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha + x \cdot \ln\frac{e}{x}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο το $\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι: α) $\alpha = -\frac{1}{2}$ β) Η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0,+\infty)$, μία στο $\left(\frac{1}{e^2},1\right)$ και μία στο $\left(1,e^2\right)$.

11. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x} = 0$,

i. Δείξτε ότι $f(0) = 2$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x) - \dfrac{f(x)}{e^x} = e^{2x} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

α) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$,

β) Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-f(\frac{1}{x})}{\sigma\upsilon\nu x - 2}$,

γ) Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$.

12. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) - 2$ και $f(x) + 2e^{-x} \ge g(x) + \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$. Δείξτε ότι $f'(0) = g'(0) + 3$.

13. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \ge x + 1$ και $f(x) \cdot e^{g(x)} = e^x - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο M(0,1), να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο $x_0 = 0$ τέμνονται κάθετα.

14. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει: $f(x) + \ln\left[1 + f^2(x)\right] = e^x + x^3 + 1$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

15. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$ και $f(x) \cdot f''(x) \neq f'(x) \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\ln f(x)$ έχει το πολύ ένα ακρότατο.

16. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f([\alpha, \beta]) = [-1, 2]$, $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 1$, να δείξετε ότι: α) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$, β) αν η f' είναι συνεχής στο [α,β] τότε η $(x^2 + 1) \cdot f(x) = f'(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

17. Έστω $f(x) = \ln x + 2x - 2$ και $g(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$. α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. β) Να βρείτε το πρόσημο της f. γ) Δείξτε ότι $g'(x) = \dfrac{f(x)}{4x\sqrt{x}}$. δ) Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα και το πρόσημο.

18. Έστω $f(x) = \dfrac{x \cdot \ln x}{1 - x}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

19. Δείξτε ότι: α) $x^2 \geq 2lnx + 1$ για κάθε $x > 0$. β) $x \leq \dfrac{1}{\alpha} e^{x-1} + \ln\alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x(x - 2) + \lambda x + 2$ με $\lambda > 1$. α) Αποδείξτε ότι $f'(x) \geq \lambda - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. γ) Να λύσετε την εξίσωση $x(\lambda + e^x) = 2(e^x - 1)$.

21. Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύουν: $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ και $\eta\mu x < x - \dfrac{1}{6}x^3$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \lambda x$ με $\lambda > 0$ και λ_0 η ελάχιστη τιμή του λ για την οποία $f(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$. α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή της f, β) βρείτε την τιμή λ_0, γ) αποδείξτε ότι η ευθεία $\epsilon : y = \lambda_0 x$ εφάπτεται της C_g, όπου $g(x) = \ln x$.

23. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ για την οποία ισχύει: $\ln f(x) + e^{f(x)} = 2x \ln x - 3x + 2\sqrt{e} + e$ για κάθε $x > 0$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

24. Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη 2 φορές, για την οποία για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύουν: $f(x) = f(2 - x)$ και $f''(x) \neq 0$. α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$. β) Αν η f'' είναι συνεχής στο [0.2] με $f(0) > f(1)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

25. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $3x^2 \cdot f(x) - f^3(x) = 2x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

26. Έστω $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \eta\mu x \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. α) Να αποδείξετε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, και να τις υπολογίσετε, β) να βρείτε τον τύπο της f.