Φυλλάδιο 13 - Ολοκληρώματα

Παράγουσα συνάρτηση

Συνάρτηση f	**Παράγουσα της f**
$f(x)=0$	$G(x)=c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=x^a$	$G(x)=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\epsilon\phi x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\phi x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$G(x)=e^x+c,\ \ c\in\mathbb{R}$
$f(x)=a^x$	$G(x)=\frac{a^x}{\ln a}+c,\ \ c\in\mathbb{R}$

Σημείωση:
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται, έχουν νόημα.

Αν F και G είναι παράγουσες των f και g αντίστοιχα και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:
α) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $f+g$
β) Η συνάρτηση λF είναι μία παράγουσα της συνάρτησης λf

Ορισμένο ολοκλήρωμα

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ μίας συνάρτησης f, πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε ότι η f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και ότι είναι συνεχής στο κλειστό $[a,\beta]$. Προσοχή! το διάστημα πρέπει να είναι κλειστό.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το ολοκλήρωμα με άκρα a, β προυποθέτει ότι η συνάρτηση ορίζεται στο $[a,\beta]$ και όχι απλώς σε ένωση διαστημάτων $[a,x_0)\cup(x_0,\beta]$. Έτσι, δεν θα πρέπει να συναντήσουμε ολοκλήρωμα σαν το $\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx$.

Πρόταση 1: Τη χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη
Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx$

Πρόταση 2: Τη χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη
Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, και **επιπλέον** δεν είναι ίσες στο $[a,\beta]$ (δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0\in[a,\beta]$ με $f(x_0)\neq g(x_0)$) τότε θα ισχύει: $\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$

Μεθοδολογία - Κατηγορίες υπολογισμού

1. Ισοδύναμος συμβολισμός

1. σπάω το κλάσμα: $\frac{x+x^3+\sqrt[3]{x}}{x^2}=\frac{1}{x}+x+x^{-\frac{5}{3}}$	4. $\frac{1}{x^\nu}=x^{-\nu}$
2. κάνω τη ρίζα δύναμη $\sqrt[3]{x}=\lvert x\rvert^{\frac{1}{3}}$	5. $a^x=e^{x\ln a}$
3. αφαιρώ τη ρίζα από τον παρονομαστή $\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$	

Παραδείγματα: **1.1** $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx,$ **1.2** $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2}}dx$

2. Ιδιότητες παραγώγισης και σύνθεσης συναρτήσεων

$\frac{f'(x)}{f(x)}=[\ln\lvert f(x)\rvert]'$ αν $f(x)\neq 0\ \forall x$	$\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\left[-\frac{1}{f(x)}\right]'$	$f'(x)\cdot e^{f(x)}=\left[e^{f(x)}\right]'$
$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'$	$f'(g(x))\cdot g'(x)=[f(g(x))]'$	

Παραδείγματα: **2.1** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ **2.2** $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ **2.3** $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x\cdot e^{1-\eta\mu x}dx$
2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$ **2.5** $\int_0^1 e^{-x}(1-x)dx$ **2.6** $\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

3. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Στη μέθοδο αυτή γίνεται συμπλήρωση της ιδιότητας παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=[f(x)\cdot g(x)]'$. Συνήθως χρησιμοποιείται όταν, για το ολοκλήρωμα I που μας δίνεται:

- το νέο ολοκλήρωμα είναι πιο εύκολο να το υπολογίσουμε, ή
- στο δεξί μέλος εμφανίζεται το αντίθετο $-I$ του δοσμένου ολοκληρώματος, ή
- στο δεξί μέλος εμφανίζεται πολ/σιο λI του δοσμένου ολοκληρώματος

Παραδείγματα: **3.1** $\int_1^e \ln x\, dx$ **3.2** $\int_0^1 e^{2x}(x^2+x+1)dx$ **3.3** $\int_0^1 \frac{2x+3}{e^{1-3x}}dx$

4. Πηλίκο συναρτήσεων

Κάνουμε χρήση της ιδιότητας $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{c\cdot g(x)+kg'(x)}{g(x)}=c+k\frac{g'(x)}{g(x)}$

Παραδείγματα:

4.1 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\upsilon\nu x \cdot e^x + 3\eta\mu x \cdot e^x}{\eta\mu x \cdot e^x} dx$ **4.2** $\displaystyle\int_1^2 e^x \cdot \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} dx$ **4.3** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx$

5. Ρητή συνάρτηση $\displaystyle\int_a^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$

- Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$, τότε παραγοντοποιώ το $Q(x)$ και αναλύω σε άθροισμα κλασμάτων. π.χ. $\dfrac{x+3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{k_1}{x+2} + \dfrac{k_2}{x-1}$
- Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ και το $Q(x)$ έχει ρίζα διπλής τάξης, τότε παραγοντοποιώ το $Q(x)$ και αναλύω ως εξής:
$\dfrac{x+3}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{k_1}{x+2} + \dfrac{k_2}{x-1} + \dfrac{k_3}{(x-1)^2}$
- Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του $Q(x)$, τότε χρησιμοποιώ την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = \pi(x) \cdot Q(x) + \upsilon(x)$ και αναλύω ως εξής:
$\dfrac{x^3+x^2+x+3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x(x+2)(x-1)+(3x+3)}{(x+2)(x-1)} = x + \dfrac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$, όπου το τελευταίο κλάσμα είναι μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Παραδείγματα: **5.1** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{(x+2)(x-1)} dx$ **5.2** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{(x+2)(x-1)^2} dx$ **5.3** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+x^2+x+3}{(x+2)(x-1)} dx$

6. Της μορφής $\displaystyle\int_a^\beta \frac{1}{x(x^k+c)} dx$

Το τέχνασμα που χρησιμοποιώ είναι $\dfrac{1}{x(x^k+c)} = \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{c}{x(x^k+c)} = \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{(x^k+c)-x^k}{x(x^k+c)} = \dfrac{1}{c} \cdot \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{x^{k-1}}{x^k+c}\right]$

Παραδείγματα: **6.1** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+2)} dx$ **6.2** $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{x(x^4+1)} dx$

7. Μέθοδος αντικατάστασης

Για το ολοκλήρωμα $I = \int_a^\beta f(x)dx$ τα βήματα είναι τα εξής:

- θέτω μια παράσταση του x ως $u(x)$ και υπολογίζω την $u'(x) = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow du = u'(x) \cdot dx$
- θα πρέπει να γράψω την $f(x) = g(u) \cdot u'(x)$, όπου $g(u)$ εννοούμε το $g(u(x))$
- βρίσκω τα νέα όρια του ολοκληρώματος $u(a)$ και $u(\beta)$
- το ολοκλήρωμα γίνεται $I = \displaystyle\int_{u(a)}^{u(\beta)} g(u)du$

Παραδείγματα: **7.1** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ **7.2** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx$ **7.3** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

7.4 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}\,dx$ **7.5** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \eta\mu\sqrt{x}\,dx$

8. Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $I = \displaystyle\int_a^\beta f^{-1}(y)dy = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(\beta)} xf'(x)dx.$

Για να φτάσουμε στον προηγούμενο τύπο θυμόμαστε ότι για τις παραγώγους των f, f^{-1} ισχύει: $\left[f^{-1}\right]'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$. Για ευκολία, μπορούμε να θυμόμαστε ότι με τα διαφορικά μπορούμε να κάνουμε τις βασικές πράξεις όπως με τους αριθμούς, οπότε: $f^{-1}(y)dy = f^{-1}(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot dx = f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)\cdot dx = xf'(x)dx$

Παραδείγματα:

8.1 $\displaystyle\int_{-2}^0 f^{-1}(x)dx$ για $f(x) = x^3+x-2$ **8.2** $\displaystyle\int_1^{1+e} f^{-1}(x)dx$ για $f(x) = e^x + x^3,\ x>0$

9. Ολοκλήρωμα τριγωνομετρικής συνάρτησης

Σε αυτή την κατηγορία γίνεται χρήση μιας τριγωνομετρικής ταυτότητας για το μετασχηματισμό του ολοκληρώματος. Π.χ. $\epsilon\phi^3 x = \epsilon\phi x\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Παραδείγματα: **9.1** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \epsilon\phi^3 x dx$

10. Δημιουργούμε σχέση $I = c - I$ ή $I = c + \lambda I$

Σε αυτή την κατηγορία προσπαθούμε με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους να εμφανίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος, αλλά με διαφορετικό συντελεστή. Π.χ. $I = \int_a^\beta f(x)dx = \cdots = c - I \Rightarrow 2I = c \Rightarrow I = c/2$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ολοκληρώσουμε συνάρτηση υψωμένη σε δύναμη, μετατρέποντας σε σχέση που έχει το ολοκλήρωμα μικρότερης δύναμης της ίδιας συνάρτησης. π.χ. $I_\nu = \int_1^e \ln^\nu x\,dx = e - \nu I_{\nu-1}$ που είναι αναδρομική σχέση, με το I_1 να είναι εύκολα υπολογίσιμο.

Παραδείγματα:

10.1 Η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ με $f'(x) = f'(1-x)$ για κάθε $x\in[0.1]$. Δείξτε ότι $I = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$

10.2 Υπολογίστε το $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\eta\mu 2x\,dx$ **10.3** $\displaystyle\int_1^e \ln^5 x\,dx$

Παραδείγματα

1. Ολοκλήρωση με προφανή αρχική συνάρτηση

1.1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx =$

1.2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-2}} =$

2. Ιδιότητες παραγώγισης και σύνθεση συναρτήσεων

2.1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx =$

2.2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx =$

2.3. $\displaystyle\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{1-\eta\mu x}dx =$

2.4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx =$

2.5. $\displaystyle\int_0^1 e^x\left(1-x\right)dx =$

2.6. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx =$

3. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

3.1. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx =$

3.2. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\left(x^2+x+1\right)dx =$

3.3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{e^{1-3x}}dx =$

4. Πηλίκο συναρτήσεων

4.1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x+3\eta\mu x\cdot e^x}{\eta\mu x\cdot e^x}dx =$

4.2. $\displaystyle\int_1^2 e^x\cdot\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}dx =$

4.3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx =$

5. Ρητή συνάρτηση

5.1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{(x+2)(x-1)}dx =$

5.2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{(x+2)(x-1)^2}dx =$

5.3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+x^2+x+3}{(x+2)(x-1)}dx =$

6. Της μορφής $\displaystyle\int_a^\beta \frac{1}{x(x^k+c)}dx$

6.1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+2)}dx =$

6.2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2}{x(x^4+1)}dx =$

7. Μέθοδος αντικατάστασης

7.1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx =$

7.2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx =$

7.3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx =$

7.4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \eta\mu\sqrt{x}\,dx =$

8. ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

8.1. Αν $f(x) = x^3 + x - 2$ να υπολογίσετε το $I = \displaystyle\int_{-2}^0 f^{-1}(x)dx$

8.2. Αν $f(x) = e^x + x^3$ για $x > 0$ να υπολογίσετε το $I = \displaystyle\int_1^{1+e} f^{-1}(x)dx$

9. ολοκλήρωση τριγωνομετρικής συνάρτησης

9.1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \epsilon\phi^3 x dx$

10. Δημιουργούμε σχέση $I = c - I$ ή $I = c + \lambda I$

10.1 Η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ με $f'(x) = f'(1-x)$ για κάθε $x \in [0.1]$. Δείξτε ότι $I = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$

<u>Λύση:</u>
Για κάθε $x \in [0.1]$ ισχύει $f'(x) = f'(1-x) \Leftrightarrow f'(x) = [-f(1-x)]' \Leftrightarrow$

$f(x) = -f(1-x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$ (1)

η οποία για $x = 0$ δίνει $c = f(0) + f(1)$ (2)

$I = \int_0^1 f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_0^1 [c - f(1-x)]\,dx = \int_0^1 c\ dx - \int_0^1 f(1-x)dx \Leftrightarrow$
$I = c - \int_0^1 f(1-x)dx$ (3)
Θέτω $u = 1-x$ οπότε $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 -f(u)du = \int_0^1 f(u)du = I$ (4)
$(3) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} I = c - I \Leftrightarrow 2I = c \Leftrightarrow I = c/2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \boxed{I = \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{f(0)+f(1)}{2}}$

10.2 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \eta\mu 2x\ dx$

10.3 $I_\nu = \displaystyle\int_1^e \ln^\nu x\ dx = \int_1^e (x)' \ln^\nu x\ dx = [x \cdot \ln^\nu x]_1^e - \int_1^e x \ln^{\nu-1} x \cdot \frac{1}{x}\ dx = e - I_{\nu-1}$ οπότε έχω δημιουργήσει την αναδρομική σχέση $I_\nu = e - I_{\nu-1}$ με $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln x\ dx = 1$

$I_1 = 1$

$I_2 = e - I_1 = e - 1$

$I_3 = e - I_2 = e - (e-1) = 1$

$I_4 = e - I_3 = e - 1$

$I_5 = e - I_4 = e - (e-1) = 1$ άρα $\displaystyle\int_1^e \ln^5 x\ dx = 1$

Ασκήσεις

1. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx =$