

Φυλλάδιο 09 - Συνέπειες θεωρήματος Μέσης Τιμής

Ασκήσεις

1. Βρείτε τη μονοτονία της $f(x) = x^{1/x}, x > 0$.
2. Βρείτε τη μονοτονία της $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x, x > 0$.
 - α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) - \ln x < 1/x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - β) Να αποδείξετε ότι $f \downarrow$ στο $x \in (0, +\infty)$.
4. Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\beta) = \alpha, f(\alpha) = \beta$ και $0 < \alpha$. Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει: $f'(x) + f(x) + e^{-x} < 0$, να δείξετε ότι:
 - α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,
 - β) $f \downarrow$ στο $[\alpha, \beta]$.
5. Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f''(x) > g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, f(0) = g(0), f'(0) > g'(0)$. Να δείξετε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$.
6. Έστω η συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1 + e^x \cdot \ln(1-x)}{e^x}$.
 - α) Να βρείτε τη μονοτονία της f
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x \left(\ln \frac{x-3}{x-1} - \ln 2 \right) = \frac{e}{e^x} - e^2$ για $x < 1$.
7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ για $x > e$.
 - α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - β) Δείξτε ότι: $x^{x+2021} > (x+2021)^x$ και $x^{2021} > \left(1 + \frac{2021}{x}\right)^x$.
8. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2e^{x-1} - 2 \ln x - 3 = 0$ στο διάστημα $[1, e]$.
9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2f(2)x + f(3)}{x-1} = 4$.
 - α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 - β) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(-|x-3|) - 1) = -1$.
 - δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
 - ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x}{f^{2021}(x)}$.
10. Έστω $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
 - β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x}(x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
11. Έστω $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2$. Για τη συνάρτηση f να βρείτε:
 - α) το πεδίο ορισμού της,
 - β) τη μονοτονία της,
 - γ) το σύνολο τιμών της.