

Φυλλάδιο 05 - Συνέχεια συνάρτησης (σε σημείο, σε διάστημα, στο πεδίο ορισμού)

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις: α) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$

β) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$ στο πεδίο ορισμού της γ) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & , x \geq 0 \\ x^2-x+2 & , x < -1 \end{cases}$ στο πεδίο ορισμού της

2. Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ \sin x \cdot \ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$ α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$

3. Να εξετάσετε την $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ ως προς τη συνέχεια και να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση f με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2019}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5. Αν $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1 με την ιδιότητα $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ β) Αν η f είναι συνεχής στο 1, δείξτε ότι θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Αν $A = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ και η $f : A \rightarrow (-1, 1)$ είναι μία συνάρτηση συνεχής στο 0, με την ιδιότητα $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) \cdot f(y)}$ για κάθε $x, y \in A$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλο το A .

8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \geq \frac{f^2(x) + \sin^2 x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

9. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = \ln x$, $\forall x > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

10. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

11. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και την ιδιότητα $e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) = x + 2e^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και αντιστρέψιμη. β) Να βρείτε την f^{-1} . γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

13. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $xf(x) = x^2 + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

14. Να υπολογίσετε τα a, β , αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. **α)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \sqrt{x} - ax + \beta}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 3 & , \quad x = 1 \end{cases} \quad \text{β)} \quad f(x) = \begin{cases} 4ae^x + \beta \cdot \sin x & , \quad x < 0 \\ x + 2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + ax - \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$$

15. Να δείξετε ότι, στις παρακάτω περιπτώσεις, η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα που δίνεται: **α)** $x^3 + x - 1 = 0$ στο $(0, 1)$. **β)** $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$ στο $(1, 2)$.

γ) $3x + x^2 = e^x + 1$ στο $(0, 1)$. **δ)** $\ln x = \frac{1}{x-1}$ στο $(0, 1)$.

16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3 - x = e^{+1}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

17. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο διάστημα $(1, e)$.

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

19. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = [0, \ln 2]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = \ln(x_0 + 1)$.

20. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $-1 < f(x) < 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$.

21. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{5} - \ln f(x)$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1)x^2 + 1}{f(0)x + 2}$.

23. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = -2$ και $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2) \cdot x^3 - x + 1)$.

24. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $|f(x)| = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$. **β)** Αν $f(0) = -1$, να βρείτε τον τύπο της f .

25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) + 2 = x + 2f(x)$, $\forall x \geq 1$ και $f(2) = 2$. Να βρείτε τον τύπο της f .

27. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $4x^2 + f^2(x) = 4$, $\forall x \in [-1, 1]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. **β)** Να δείξετε ότι η f έχει το ίδιο πρόσημο σε ολόκληρο το διάστημα $(-1, 1)$. **γ)** Να βρείτε τον πιθανό τύπο της συνάρτησης f .

δ) Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f .

28. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) + 2x - 1 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 29.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, όπου $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **α)** Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$. **β)** Να δείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.
γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$. **δ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- 30.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - (a + \beta)x^2 - a\beta x + a\beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. **α)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $f(0)$ και $f(1)$ είναι ο $\frac{(1-a)(1-\beta)}{2}$. **β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = \frac{(1-a)(1-\beta)}{2}$.
- 31.** Δίνεται η συνεχής και περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2018$. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f με τεταγμένη π .
- 32.** Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \frac{7f(a) + 2f(\beta) + f(\frac{a+\beta}{2})}{10}$.
- 33.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε η f έχει ελάχιστο.
- 34.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln x - 1$. **α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. **β)** Να αποδείξετε ότι η $x^{x-1} = e^{2018}$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **γ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} - f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$.
- 35.** Δίνεται η συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow [a, \beta]$ με $f(f(x)) > f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.
- 36.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) < f(2)$ και $f(2) > f(3)$. Να δείξετε η f δεν είναι 1-1.
-
- 37.** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
- 38.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f βρίσκεται συνεχώς πάνω από τη C_g όπου $g(x) = \ln x$, $x > 0$, να βρείτε τον τύπο της f .
- 39.** Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \ln x$. **α)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **β)** Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών. **γ)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.
- 40.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
- 41.** Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $xf(x) \geq \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $f(0)$.
- 42.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} k(x-1) + e^x & , \quad x \leq 1 \\ e + \ln x & , \quad x > 1 \end{cases}$ για την οποία δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο διάστημα $[0, e]$. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. **β)**

Να υπολογίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$. γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0, e)$. δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

43. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(0) - 1]x^3 + x + 1}{[f(\pi) + 1]x^2 + 1}$

β) Αν επιπλέον ισχύει $[f(x) - \eta\mu x] \cdot [f(x) + \eta\mu x] = 2f(x) \cdot \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$:

1. Να δείξετε ότι $f(x) = 1 + \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x + f(x)}$

3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 3)$ ώστε να ισχύει: $f(x_0) = 1 + \frac{\sin 1 + \sin 2 + \sin 3}{3}$

44. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{-x}[f^2(x) - 1] = 2f(x) - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x - 2}{x^2 + x} = 1$. α) Να υπολογίσετε το $f(0)$ β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη C_g , όπου $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, 1)$. δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2^x}{f(x) - 3^x}$

45. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

γ) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f . δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2f(x)} - 2019 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.