

Φυλλάδιο 06 - Παράγωγος συνάρτησης (σε σημείο, σε διάστημα, στο πεδίο ορισμού)

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{2}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο 0 και $xf(x) = \eta\mu^{2018}x + x^{2018}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **α)** Να υπολογίσετε το $f(0)$. **β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.
3. Να βρείτε αν είναι παραγωγίσιμες στο μηδέν οι συναρτήσεις: **α)** $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ **β)** $g(x) = \sqrt{x}$, με $x \in [0, +\infty)$.
4. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x) - \eta\mu(x-2)| \leq x^2 - 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.
5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^{2018}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
6. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο μηδέν, με $f^3(x) + x^2f(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $f'(0) = 0$.
7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη στο 1, με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
8. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο μηδέν, με $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
9. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1, με την ιδιότητα $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.
10. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1, με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
11. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = k \in \mathbb{R}$, για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, και $f(x_0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $f'(x_0) = -\frac{k}{2}$.
12. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **α)** Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται. **β)** Να εξετάσετε αν η f^{-1} παραγωγίζεται.
13. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = x_0^2 + 1$. Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$.
14. Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο a , με $f(a) \neq 0$. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:
α) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a}$ **β)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x) + 2(a)f(x) - 3f^2(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

- 15.** Να βρείτε, στο πεδίο ορισμού τους, την παράγωγο των συναρτήσεων: **α)** $f(x) = \sqrt{x}$, με $x \in [0, +\infty)$ **β)** $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$ **γ)** $h(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \ln \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- 16.** Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f''(0) = -1$: **α)** Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$. **β)** Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. **γ)** Να αποδείξετε ότι $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **δ)** Να αποδείξετε ότι αν $h(x) = [f'(x)]^2 + f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 17.** Έστω μία περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε: **α)** Η f' είναι άρτια συνάρτηση και η f'' είναι περιττή συνάρτηση. **β)** $f''(0) = f(0) = 0$. **γ)** Αν $g(x) = e^{f(x)-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\frac{g''(0)}{g'(0)} = \frac{g'(0)}{g(0)}$.
- 18.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x$. Να αποδείξετε ότι: **α)** Η f είναι αντιστρέψιμη. **β)** Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(1)$.
- 19.** Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: **α)** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. **β)** $f'(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 20.** Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) \cdot f'(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$. **α)** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής. **β)** Να αποδείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **γ)** Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $g'(x) = 0$ για κάθε πραγματικό x .
- 21.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
β) Δείξτε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
γ) Δείξτε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.