

Φυλλάδιο 07 - Εφαπτομένη γραφικής παράστασης - Ρυθμός μεταβολής

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = \lambda x + \beta$, αλλά μας συμφέρει να χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη εξίσωση από τα μαθηματικά κατεύθυνσης της β' λυκείου, η οποία είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, όπου (x_0, y_0) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου της εφαπτομένης και λ η κλίση της. Το λ είναι ο ίδιος αριθμός και στους δύο τύπους.

- Αν δύο ευθείες $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες, θα ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$. Αν επιπλέον $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.
- Αν δύο ευθείες $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους, θα ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Για να προσδιορίσουμε μία ευθεία, χρειαζόμαστε α) δύο σημεία της ή β) ένα σημείο της και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ ή ένα σημείο της και την κλίση λ .

- Αν η ευθεία περνά από δύο γνωστά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , τότε $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Αν η ευθεία διέρχεται από ένα γνωστό σημείο και σχηματίζει γνωστή γωνία $\hat{\omega}$ με τον άξονα $x'x$, τότε $\lambda = \tan \hat{\omega}$.
- Αν η ευθεία εφάπτεται στην C_f στο σημείο (x_0, y_0) , τότε $\lambda = f'(x_0)$ και $y_0 = f(x_0)$.
(Προσοχή: το (x_0, y_0) να είναι το σημείο επαφής και η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0).
Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, να βρείτε: **α)** την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(e, f(e))$ **β)** την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -2x + 2021$
2. Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R}^*$: **α)** να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ **β)** να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες, είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου A .
3. Να υπολογίσετε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = -x^2$.
4. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της f .
5. Αν $f(x) = x^3 + 2x - 2$: **α)** να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} **β)** αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = -2$.
6. Αν $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x > 0$. **α)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . **β)** Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η εξίσωση της εφαπτομένης της f^{-1} με τον θετικό ημιάξονα Ox .

Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x ονομάζεται η παράγωγος του y θεωρώντας ως μεταβλητή το x . Θεωρούμε, δηλαδή, το y συνάρτηση του x και παραγωγίζουμε. Συμβολίζεται με $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{dy(x)}{dx}$ ή $y'(x)$.

Συνήθως χρησιμοποιείται σε προβλήματα Φυσικής ή Οικονομικών. π.χ.

- Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)$, όπου t ο χρόνος, τότε ο ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης είναι $x'(t) = u(t)$ που στη Φυσική ονομάζεται ταχύτητα. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $u(t)$ είναι $u'(t) = x''(t) = a(t)$ που στη Φυσική ονομάζεται επιτάχυνση.
- Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $E = \pi r^2$. Θεωρώντας το ρ μεταβλητή, το εμβαδόν είναι η συνάρτηση $E(\rho) = \pi \rho^2$ και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού θα είναι $\frac{dE}{d\rho} = \frac{dE(\rho)}{d\rho} = E'(\rho)$, δηλαδή η παράγωγος ως προς τη μεταβλητή ρ .

Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = \ln x$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $x_0 = 2$.
2. Έστω $f(x) = \ln x$ με $x > 0$. Ένα σημείο M του επιπέδου κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 5cm/sec . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής M σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $A(3, \ln 3)$.
3. Έστω $f(x) = x \ln x - 1$ με $x > 1$. Να βρείτε το σημείο $M(x, y)$ της C_f όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης τη χρονική στιγμή t_0 είναι αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του (θέλουμε να είναι αντίθετος, όχι μηδέν. Άρα $x'(t) = -y'(t) \neq 0$).
4. Έστω $f(x) = x^2 - 4x$ με $x > 0$. Να βρείτε το σημείο $M(x, y)$ της C_f όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης τη χρονική στιγμή t_0 είναι ο μισός του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του (Άρα $2x'(t_0) = y'(t_0)$).
5. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου, μεταβάλλονται με το χρόνο. Το x αυξάνεται με ρυθμό 2m/sec ενώ το y ελλατώνεται με ρυθμό 3m/sec . α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου. β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Εμβαδού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι $x = 10\text{m}$ και $y = 12\text{m}$.
6. Έστω $f(t) = 2t + k$ όπου $k \in \mathbb{R}$ μία παράμετρος. Για μία εταιρεία ισχύουν τα εξής:
 - t είναι ο χρόνος, σε έτη, από την ίδρυση της εταιρείας. Άρα στο εξής, $t \geq 0$.
 - Τα έσοδα (σε εκατομμύρια ευρώ) τη χρονική στιγμή t (σε έτη) δίνονται από τη συνάρτηση $E(t) = (t - 1) \cdot f(t)$.
 - Το κόστος λειτουργίας (σε εκατομμύρια ευρώ) τη χρονική στιγμή t (σε έτη) δίνεται από τον τύπο $K(t) = f(t + 4)$.

- Το πρώτο έτος λειτουργίας η εταιρεία παρουσίασε ζημιά 12 εκατ. ευρώ.

Να υπολογίσετε: **α)** Τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$ τη χρονική στιγμή t . **β)** Τη χρονική στιγμή που η εταιρεία θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη. **γ)** Το ρυθμό μεταβολής του κέρδους στο τέλος του 2ου έτους.

Λύση:

α) Το κέρδος τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $P(t) = E(t) - K(t) \Leftrightarrow$

$$P(t) = (t-1)f(t) - f(t+4) \Leftrightarrow P(t) = (t-1)(2t+k) - [2(t+4)+k] \text{ Επειδή το πρώτο έτος}$$

$$\text{είχε ζημιές 12 εκατ. ευρώ, } P(1) = -12 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow P(t) = 2t^2 - 2t - 12, t \geq 0$$

β) $P(t) > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow t > 3$. Άρα θα αρχίσει να έχει κέρδος μετά το τέλος του 3ου έτους λειτουργίας.

γ) το ζητούμενο είναι το $P'(2) = \dots = 6$. Άρα η απάντηση είναι 6 εκατ. ευρώ ανά έτος.