

Φυλλάδιο 11 - Κυρτότητα

Χρήσιμες προτάσεις (Αν τις χρησιμοποιήσουμε, πρέπει να τις αποδείξουμε)

Πρόταση 1: Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[a, \beta]$ (άρα συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β)), τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της f στο (τυχαίο) $x_0 \in (a, \beta)$. Δηλαδή για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει: $f(x) \geq y_{\varepsilon\varphi} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Πρόταση 2: Αν η f είναι κοίλη στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της f στο (τυχαίο) $x_0 \in (a, \beta)$. Δηλαδή για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει: $f(x) \leq y_{\varepsilon\varphi} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Υπόδειξη: Αν $x < x_0$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x, x_0]$. Αν $x_0 < x$, Θ.Μ.Τ. στο $[x_0, x]$.

Πρόταση 3: Αν η f είναι κυρτή και η g κοίλη στο διάστημα $[a, \beta]$, και εφάπτονται στο σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (a, \beta)$ τότε για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει: $g(x) \leq y_{\varepsilon\varphi} \leq f(x)$, όπου $y_{\varepsilon\varphi} = \lambda x + \beta$ η κοινή εφαπτομένη στο σημείο M . Η ισότητα ισχύει μόνο στο x_0 .

Υπόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τις προηγούμενες προτάσεις.

Πρόταση 4: Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f στο $[a, \beta]$ βρίσκεται κάτω από τη χορδή AB , όπου $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Δηλαδή για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει: $f(x) \leq y_{AB}$.

Πρόταση 5: Αν η f είναι κοίλη στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f στο $[a, \beta]$ βρίσκεται πάνω από τη χορδή AB , όπου $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Δηλαδή για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει: $f(x) \geq y_{AB}$.

Υπόδειξη: Προφανώς υπάρχει ξ με $f'(\xi) = \lambda_{AB}$. Αν $x < \xi$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x, \xi]$, αλλιώς, στο $[\xi, x]$.

Πρόταση 6: Αν η f είναι κυρτή και η g κοίλη στο $[a, \beta]$ και έχουν κοινά σημεία τα $A(a, y_a)$ και $B(\beta, y_\beta)$, τότε για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει: $f(x) \leq y_{AB} \leq g(x)$, όπου $y_{AB} = \lambda_{AB}x + \beta$ η κοινή χορδή AB . Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = a$ ή $x = \beta$.

Υπόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τις προηγούμενες προτάσεις.

Πρόταση 7: Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο $[a, \beta]$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο σε ένα από τα άκρα του $[a, \beta]$.

Πρόταση 8: Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο $[a, \beta]$, τότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (αντίστοιχα ολικό ελάχιστο) στο $[a, \beta]$, σε ένα από τα άκρα.

Πρόταση 9: Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο $[a, \beta]$ και σε εσωτερικό σημείο x_0 έχω $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (αντίστοιχα ολικό μέγιστο) στο x_0 .

Υπόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την πρόταση 1 ή 2 για το ακρότατο, και τη μονοτονία της f' για τη μοναδικότητα του ακροτάτου, οπότε είναι ολικό ελάχιστο (αντ. μέγιστο).

Πρόταση 10: Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο $[a, \beta]$, τότε αν ορίζεται η παράγωγος της f^{-1} , θα έχω f^{-1} κοίλη (αντίστοιχα κυρτή).

Πρόταση 11: Αν η f είναι κυρτή στο $[a, \beta]$, τότε $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$. Για κοίλη συνάρτηση, αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα $\left[a, \frac{a+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+\beta}{2}, \beta\right]$.

Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
2. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^4 + 6x^2 & , \quad x < 0 \\ x^6 + 45x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$. Δείξτε ότι: **α)** Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[a, \beta]$ (f κυρτή), τότε $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) < \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$. **β)** Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[a, \beta]$ (f κοίλη), τότε $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) > \frac{f(a)+f(\beta)}{2}$.
4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{3e^x + 4}{e^x + 1}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα, και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.
5. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Να υπολογίσετε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = f(x) - xf'(x)$.
6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}(a+2)x^3 + 2x^2 + x + 1$ με $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το a ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι αντιστρέψιμη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν η f^{-1} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι: **α)** $(f^{-1})'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **β)** $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **γ)** Αν επιπλέον των παραπάνω η f είναι κυρτή και οι $f''(x)$ και $(f^{-1})'(x)$ είναι ομόσημες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f^{-1} είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
8. Έστω η κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και (ε) η ευθεία $y = x$. Αν η (ε) τέμνει την C_f στα σημεία $O(0, 0)$ και $A(3, 3)$, να δείξετε ότι η C_f στο $(0, 3)$ βρίσκεται κάτω από την (ε) .