

Φυλλάδιο 12 - Ασύμπτωτες - Μελέτη συνάρτησης - Γραφική παράσταση**Γραφικές παραστάσεις με χρήση παραγώγων - Μεθοδολογία**

Πριν ξεκινήσω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που μου έδωσαν, συγκεντρώνω τα παρακάτω στοιχεία:

1. Πεδίο ορισμού A_f
2. Συμμετρίες (άρτια, περιττή), περιοδικότητα
3. Διαστήματα του A_f όπου η συνάρτηση είναι συνεχής
4. Διαστήματα του A_f όπου η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη
5. Μονοτονία
6. Ακρότατα
7. Κυρτότητα και σημεία καμπής
8. Πίνακας μεταβολών της συνάρτησης
9. Ασύμπτωτες ευθείες (οριζόντιες - πλάγιες - κατακόρυφες)
10. Όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f
11. Σημεία τομής με τους άξονες

Στη συνέχεια σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και πριν σχεδιάσω την C_f , σχεδιάζω:

1. τις ασύμπτωτες ευθείες
2. τα σημεία τομής με τους άξονες
3. τα σημεία των ακροτάτων
4. τα σημεία καμπής
5. τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f

Τέλος, σχεδιάζω την C_f σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών της f .

Ασκύσεις

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$.
2. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, όπου $g(x) = \frac{xf(x) - x^2 + 7}{x^2f(x) - 2x^3 - 2x - 1}$.
3. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$, με πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$.
4. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^3 + \beta x^2 - 2}{x^2 + 1}$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = (2 - a)x + 4 - \beta$. Να υπολογίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$.
5. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$ και $f^2(x) - xf(x) - \beta = \frac{a}{4}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$, $16\beta \neq 1$. Να υπολογίσετε το a και να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.
6. Έστω η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{(a-1)x + 6}{x + \beta}$ η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = 2$ και $x = -1$.
α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2x + 6}{x + 1}$, $x > -1$ **β)** Να βρείτε ποια είναι η συνάρτηση g για την οποία $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x > -1$ γνωρίζοντας ότι η C_g διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.
γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = \frac{g(x)}{x + 1}$, $x > -1$. **δ)** Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της $h(x)$.