

Μάθημα 01

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

15/09/2025

Η έννοια της συνάρτησης

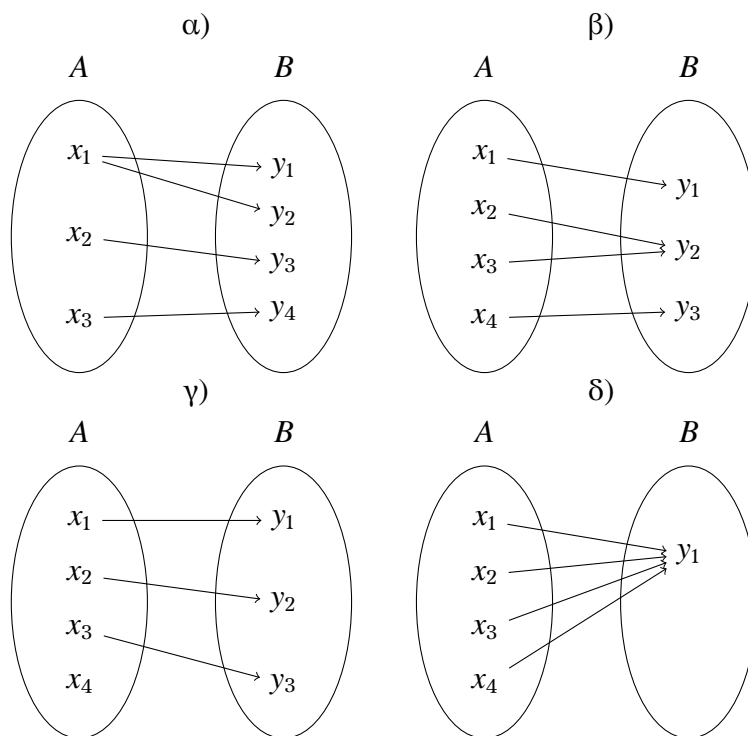
- Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μάθαμε στην Α' Λυκείου.

Ορισμός: Συνάρτηση

Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα A και B . **Συνάρτηση** από το A στο B ονομάζεται μια διαδικασία ή κανόνας με τον οποίο κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του συνόλου B .

Συμβολικά γράφουμε $f : A \rightarrow B$. Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται συνήθως με D_f ($D = \text{Domain}$), ενώ το B ονομάζεται **πεδίο τιμών** της f .

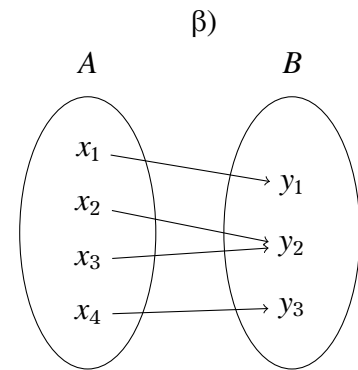
Ερώτηση 1 Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίες ορίζουν συνάρτηση;



- Θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$, και τις ονομάζουμε **πραγματικές συναρτήσεις**.

Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού A συμβολίζεται συνήθως με x και ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή*. ή πρότυπο ή αρχέτυπο, ενώ το αντίστοιχο του $y \in B$ ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή* ή *εικόνα του x* . Η τιμή της f στο x τη γράφουμε $y = f(x)$.

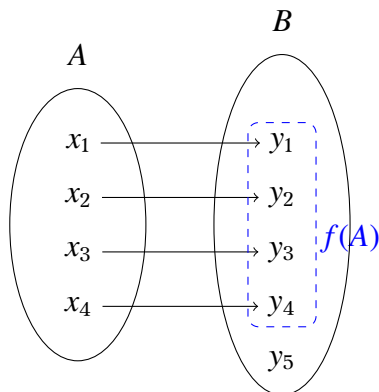
Για παράδειγμα, στο διπλανό διάγραμμα, το x_3 του πεδίου ορισμού, έχει εικόνα το y_2 , δηλαδή $f(x_3) = y_2$.



Ορισμός: Σύνολο τιμών

Το **σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$ ονομάζεται το σύνολο των στοιχείων $y \in B$ για τα οποία υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = y$, και συμβολίζεται με $f(A)$.

$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}.$$



Παρατηρήστε ότι $f(A) \subseteq B$.

Προσοχή! Από το συμβολισμό $f : A \rightarrow B$ (f από το A στο B) προκύπτουν τα εξής:

1. $D_f = A$,
2. $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$,
3. $f(A) \subseteq B$.

Ερώτηση 2 Με τις γνώσεις που έχετε από τις προηγούμενες τάξεις, γράψτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

- | | | | |
|-------------------|----------------------------|-----------------|-------------------------|
| 1. $f(x) = x^2$ | 3. $f(x) = \eta\mu x$ | 5. $f(x) = e^x$ | 7. $f(x) = \frac{1}{x}$ |
| 2. $f(x) = \ln x$ | 4. $f(x) = \epsilon\phi x$ | 6. $f(x) = x $ | 8. $f(x) = \sqrt{x}$ |

• Το πεδίο ορισμού μιας πραγματικής συνάρτησης f , αν δε δίνεται, είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται (έχει νόημα πραγματικού αριθμού) η τιμή $f(x)$.

Θα ασχοληθούμε κυρίως με συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Όταν θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο A , θα εννοούμε ότι $A \subseteq D_f$.

Αναφέρουμε τους περιορισμούς που πρέπει να κάνουμε σε ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις:

1. Η $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ορίζεται όταν $x \in D_g$, $x \in D_h$ και $h(x) \neq 0$.

Για παράδειγμα, η ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Leftrightarrow (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

2. Η $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) \geq 0$.

Για παράδειγμα, η $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ ορίζεται όταν

$$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Επειδή $x > 0$, έχουμε $D_f = (0, e]$.

3. Η $f(x) = \ln g(x)$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) > 0$.

Για παράδειγμα, η $f(x) = \ln(4 - x^2)$ ορίζεται όταν

$$4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Άρα, $D_f = (-2, 2)$.

4. Η $f(x) = e^{g(x)}$ ορίζεται για κάθε $x \in D_g$.

Για παράδειγμα, η $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Ομοίως, η $f(x) = \eta\mu(g(x))$ ορίζεται για κάθε $x \in D_g$.

6. Η $f(x) = \epsilon\phi(g(x))$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ενώ η $f(x) = \sigma\phi(g(x))$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Για παράδειγμα, η $f(x) = \epsilon\phi(2x + \frac{\pi}{4})$ ορίζεται όταν $2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή

$$x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Δυνάμεις

Υπενθυμίζουμε ότι για μια δύναμη a^x ισχύουν τα εξής:

1. Αν $a > 0$, τότε ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Αν $a = 0$, τότε ορίζεται μόνο για $x > 0$.
3. Αν $a < 0$, τότε ορίζεται για x ακέραιο.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x-2)^{\frac{1}{x}}.$$

Αρχικά, χρειάζεται να είναι $x \neq 0$. Για $x > 2$ η $f(x)$ ορίζεται. Για $x \in (0, 2)$, η f ορίζεται όταν $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το x να παίρνει τις μερικές τιμές $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Έτσι έχουμε

$$D_f = [2, +\infty) \cup \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Σχόλιο

Η συνάρτηση $f(x) = (g(x))^{h(x)}$, με $x \in D_g \cap D_h$ και $g(x) > 0$, γράφεται $f(x) = e^{\ln(g(x)) \cdot h(x)}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha') \quad f(x) = \frac{\sin x}{x - |x|}$$

$$(\epsilon') \quad f(x) = \log_x \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$(\beta') \quad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

$$(\zeta') \quad f(x) = \sqrt{\eta \mu x} + \sqrt[3]{-\sin x}$$

$$(\gamma') \quad f(x) = \ln x^2$$

$$(\delta') \quad f(x) = (3x - 2)^{x-1}$$

$$(\zeta') \quad f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x + a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2. Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όταν ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = \frac{xe^x - 1}{x^2 - 2x + a(2a^2 - 1)}$$

3. Να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ορίζεται κάθε μια από τις συναρτήσεις

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

Απαντήσεις

Ερώτηση 1: β) και δ)

Ερώτηση 2: Για τις γνωστές αυτές συναρτήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις γραφικές τους παραστάσεις, έχουμε:

1. $D_f = \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}) = [0, +\infty).$
2. $D_f = \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$
3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad f(D_f) = \mathbb{R}.$
4. $D_f = \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$
5. $D_f = (0, +\infty), \quad f(D_f) = (-\infty, +\infty).$
6. $D_f = \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}) = [0, +\infty).$
7. $D_f = \mathbb{R}^*, \quad f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*.$
8. $D_f = [0, +\infty), \quad f(D_f) = [0, +\infty).$

Λύση Άσκησης 1

1. Πρέπει $|x| \neq x$, δηλ. $x < 0$.
2. Πρέπει $x \geq 0$ και $x \geq \sqrt{x}$. Συνεπώς $D_f = \{0\} \cup [1, +\infty).$
3. $\mathbb{R}^*$
4. $= (\frac{2}{3}, +\infty) \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}.$
5. $(1, +\infty).$
6. Η ένωση των διαστημάτων $[2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$
7. $\mathbb{R}$, αν $a > \frac{1}{4}$. $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, αν $a = \frac{1}{4}$. $\mathbb{R} - \{\frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}\}$, αν $a < \frac{1}{4}$.

Λύση Άσκησης 2

Αρκεί το τριώνυμο στον παρονομαστή να έχει $\Delta < 0$, δηλαδή $a > 1$.

Λύση Άσκησης 3

1. Πρέπει $x > 0, \quad x \neq 1, \quad \frac{x-1}{\ln x} > 0$. Άρα $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty).$
2. Για $x > 0$, έχουμε $e^x > 1$ και $\frac{e^x-1}{x} > 0$. Για $x < 0$, επίσης $e^x < 1$ αλλά $\frac{e^x-1}{x} > 0$. Άρα $D_g = \mathbb{R}^*.$