

Μάθημα 02

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: **γ' Λυκείου κατεύθυνσης**

Ημερομηνία

17/09/2025

Εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης

• Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Θέλουμε για παράδειγμα, να εξετάσουμε αν ο αριθμός -4 είναι τιμή της f . Αυτό θα συνέβαινε αν υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = -4$.

Η εξίσωση $f(x) = -4$ γράφεται $x^2 - 3x + 5 = 0$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $\Delta = -11 < 0$. Επομένως $-4 \notin f(\mathbb{R})$.

Γενικά, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, ελέγχουμε αν για μια δοσμένη τιμή $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική λύση.

Παράδειγμα, η εξίσωση $f(x) = y \iff x^2 - 3x + (1 - y) = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$, δηλαδή $9 - 4(1 - y) \geq 0 \iff 5 + 4y \geq 0 \iff y \geq -\frac{5}{4}$. Άρα $f(\mathbb{R}) = [-\frac{5}{4}, +\infty)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $A \subseteq \mathbb{R}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ και βρίσκουμε τις τιμές του y για τις οποίες η εξίσωση αυτή έχει τουλάχιστον μία λύση ως προς x στο A .

• Θα βρούμε το σύνολο τιμών για ορισμένες συναρτήσεις, αλλά αργότερα θα μάθουμε πιο γενική μέθοδο.

Παράδειγμα 1. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται

$$ax^2 + bx + (c - y) = 0$$

και έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \iff b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \iff 4ay \geq 4ac - b^2.$$

1. Αν $a > 0$, έχουμε $y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$. Άρα $f(\mathbb{R}) = [\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$.

2. Αν $a < 0$, έχουμε $y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$. Άρα $f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}]$.

Παράδειγμα 2.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται

$$x^2 + x + 1 = y(x^2 - x + 1) \iff (1 - y)x^2 + (1 + y)x + (1 - y) = 0. \quad (1)$$

Αν $y = 1$, η (1) γράφεται $2x = 0 \iff x = 0$. Άρα $y = 1 \in f(\mathbb{R})$.

Αν $y \neq 1$, η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \iff (1+y)^2 - 4(1-y)^2 \geq 0 \iff (3y-1)(-y+3) \geq 0.$$

Άρα $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$.

Συνεπώς

$$f(\mathbb{R}) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

Παρατηρήστε ότι και η τιμή $y = 1$ ανήκει στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Παράδειγμα 3.

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται

$$2e^x - 1 = y(e^x + 2) \iff e^x(2 - y) = 2y + 1. \quad (2)$$

Αν $y = 2$, η (2) γράφεται $0 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, άτοπο. Άρα $y = 2 \notin f(\mathbb{R})$.

Αν $y \neq 2$, η (2) γράφεται

$$e^x = \frac{2y+1}{2-y}.$$

Έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{2y+1}{2-y} > 0 \iff (2y+1)(2-y) > 0$.

Αυτό ισχύει όταν $y \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Άρα $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

Παράδειγμα 4. $f(x) = \frac{2\eta\mu x + 1}{\eta\mu x - 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται

$$2 \sin x + 1 = y(\sin x - 2) \iff (y-2) \sin x = 2y + 1. \quad (1)$$

Για $y = 2$ η (1) είναι αδύνατη, άρα $2 \notin f(\mathbb{R})$. Για $y \neq 2$:

$$\sin x = \frac{2y+1}{y-2} \quad \text{και έχει λύση στο } \mathbb{R} \iff -1 \leq \frac{2y+1}{y-2} \leq 1, \quad y \neq 2.$$

Λύνουμε ταυτόχρονα:

$$\frac{2y+1}{y-2} \geq -1 \iff \frac{3y-1}{y-2} \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{3} \text{ ή } y > 2,$$

$$\frac{2y+1}{y-2} \leq 1 \iff \frac{y+3}{y-2} \leq 0 \iff -3 \leq y < 2.$$

Συνδυάζοντας (και με $y \neq 2$):

$$f(\mathbb{R}) = \left[-3, \frac{1}{3}\right].$$



Παράδειγμα 5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 2, \\ -\frac{2}{x}, & x > 2. \end{cases}$$

- Για $x \leq 2$: $f(x) = y \iff x^2 - 4x + 3 = y \iff (x - 2)^2 = y + 1$.
Η εξίσωση έχει λύση όταν $y + 1 \geq 0 \iff y \geq -1$. Επιπλέον, επειδή $x \leq 2$, η αποδεκτή ρίζα είναι $x = 2 - \sqrt{y + 1}$. Άρα από το πρώτο κλάδο παίρνουμε $y \in [-1, +\infty)$.
- Για $x > 2$: $f(x) = y \iff -\frac{2}{x} = y \iff x = -\frac{2}{y}$.
Θέλουμε $x > 2 \Rightarrow -\frac{2}{y} > 2$. Αυτό ισχύει μόνο για $-1 < y < 0$ (καθώς $x > 2 \Rightarrow y = -2/x \in (-1, 0)$).
Άρα από τον δεύτερο κλάδο $y \in (-1, 0)$.
Επειδή $D_f = (-\infty, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$, τελικά
$$f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty) \cup (-1, 0) = [-1, +\infty).$$

Σχόλια

1. **Κλαδική συνάρτηση.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B, \\ h(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad B \cap \Gamma = \emptyset$

Πεδίο ορισμού της f είναι η ένωση $B \cup \Gamma$ (τα σύνολα δεν πρέπει να έχουν κοινά στοιχεία). Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f , βρίσκουμε χωριστά τα $f(B)$ και $f(\Gamma)$. Τότε

$$f(B \cup \Gamma) = f(B) \cup f(\Gamma).$$

Τα σύνολα $f(B)$ και $f(\Gamma)$ δεν είναι αναγκαίο να είναι ξένα μεταξύ τους.

2. **Σύγκριση συνόλων τιμών για λύση εξίσωσης.** Συγκρίνοντας τα σύνολα τιμών δύο συναρτήσεων f και g μπορούμε συχνά να αποφασίσουμε αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει λύση ή είναι αδύνατη.

Παράδειγμα. Να μελετηθεί η εξίσωση $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 5 + 2 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

Από το **Παράδειγμα 2** γνωρίζουμε ότι $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Επίσης, επειδή $\sin t \in [-1, 1]$, το δεξί μέλος παίρνει τιμές στο διάστημα

$$5 + 2 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \in [3, 7].$$

Άρα, για να ισχύει η εξίσωση, πρέπει τα δύο μέλη να ανήκουν ταυτόχρονα στο $\left[\frac{1}{3}, 3\right] \cap [3, 7] = \{3\}$.

Συνεπώς, **αναγκαστικά** ισχύει $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 3$ και $5 + 2 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 3$.

Από την πρώτη:

$$x^2 + x + 1 = 3x^2 - 3x + 3 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \implies x = 1.$$

Από τη δεύτερη:

$$2 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = -2 \iff \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = -1 \iff \frac{3\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{-1 + 4k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Η κοινή λύση των δύο συνθηκών είναι $x = 1$ (παίρνοντας $k = 1$). Άρα η εξίσωση έχει **μοναδική** λύση: $x = 1$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha') f(x) = 2x - 1, \quad x \geq 1$$

$$(\varsigma') f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - x}}$$

$$(\beta') f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

$$(\zeta') f(x) = \frac{3}{2\sin x + 5}$$

$$(\gamma') f(x) = -x^2 + 4x$$

$$(\eta') f(x) = 1 - 2e^{x^2-1}$$

$$(\delta') f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$$

$$(\theta') f(x) = \begin{cases} -3 \ln x, & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(\varepsilon') f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(\alpha') x^2 + 1 = 2\sin x - 1$$

$$(\beta') x^2 + 1 = \eta\mu x$$

$$(\gamma') 2^x + 2^{-x} = 2\sin \frac{\pi x}{2}$$

3. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 2 + \eta\mu x$$

Απαντήσεις

1. $(\alpha') [1, +\infty)$

$(\beta') \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$(\gamma') (-\infty, 4]$

$(\delta') \left[-2, \frac{2}{3}\right]$

$(\varepsilon') f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$

$(\varsigma') y = \sqrt{1 - \sqrt{2 - x}}, \quad y \geq 0 \iff 1 - y^2 = \sqrt{2 - x}. \text{ Πρέπει } 1 - y^2 \geq 0 \dots \text{ Άρα } f([1, 2]) = [0, 1].$

$(\zeta') \left[\frac{3}{7}, 1\right]$

$(\eta') y = 1 - 2e^{x^2-1} \iff e^{x^2-1} = \frac{1-y}{2}, \quad y < 1. \text{ Άρα } x^2 = 1 + \ln\left(\frac{1-y}{2}\right) \text{ με } 1 + \ln\left(\frac{1-y}{2}\right) \geq 0. \text{ Τελικά } f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1 - \frac{2}{e}].$

$(\theta') [1, +\infty)$

2. $(\alpha') x^2 + 1 \geq 1$ και $2\sin x - 1 \leq 1$. Μόνη λύση $x = 0$.

(β') Αδύνατη.

$(\gamma') 2^x + 2^{-x} \geq 2$ και $2\sin \frac{\pi x}{2} \leq 2$. Μόνη λύση $x = 0$.

3. Το πρώτο μέλος παίρνει τιμές στο διάστημα $(-1, 1)$, ενώ $2 + \eta\mu x \geq 1$.