

Μάθημα 04

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

20/09/2025

Ισότητα συναρτήσεων – Πράξεις συναρτήσεων

Ορισμός: Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g ονομάζονται **ίσες**, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

- Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα και σ' ένα υποσύνολο Γ των A και B ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Gamma$, τότε λέμε ότι οι f και g **είναι ίσες στο σύνολο Γ** .

Παραδείγματα

- Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι ίσες, διότι έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = g(x)$.
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ **δεν** είναι ίσες, διότι $D_f = \mathbb{R}$ ενώ $D_g = [0, +\infty)$. Βέβαια, στο διάστημα $[0, +\infty)$ ισχύει $f = g$.
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$ **δεν** είναι ίδιες, διότι $D_f = \mathbb{R}^*$ ενώ $D_g = (0, +\infty)$.

Προσοχή!

$$\alpha) \quad \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{|x|^2} = (|x|)^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0, \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0. \end{cases}$$

$$\beta) \quad \text{Για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* \text{ ισχύει: } \ln x^{2\nu} = \ln |x|^{2\nu} = 2\nu \ln |x| = \begin{cases} 2\nu \ln x, & x > 0, \\ 2\nu \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

γ) «Κυκλοφορεί», ο εξής ορισμός ισότητας συναρτήσεων:

- «Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.»

Ο ορισμός αυτός είναι **λανθασμένος**, αφού, μας ενδιαφέρει το κάθε x να αντιστοιχίζεται στην ίδια εικόνα και αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και με διαφορετικούς τύπους συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$ με κοινό πεδίο ορισμού $A = \{-1, 0, 1\}$, τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Έτσι, έχουμε $f = g$ στο A , όμως δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

Ορισμός: Άθροισμα συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Άθροισμα των f και g ονομάζεται η συνάρτηση $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Ορισμός: Διαφορά συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Διαφορά της g από την f ονομάζεται η συνάρτηση $f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Ορισμός: Γινόμενο συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Γινόμενο των f και g ονομάζεται η συνάρτηση $f \cdot g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Ορισμός: Πηλίκο συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Πηλίκο των f και g ονομάζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου το πεδίο ορισμού της είναι το $\Gamma = A \cap B - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln(1+x)$ και $g(x) = \ln(1-x)$, με πεδία ορισμού $A = (-1, +\infty)$ και $B = (-\infty, 1)$ αντίστοιχα.

- Η συνάρτηση $f + g$ έχει πεδίο ορισμού το $A \cap B = (-1, 1)$ και τύπο

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln(1-x^2).$$

- Η $g(x)$ μηδενίζεται όταν $1-x=1$, δηλ. $x=0$.

Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το

$$A \cap B - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} = (-1, 1) \setminus \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

και τύπο

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \log_{1-x}(1+x).$$

Προσοχή! Στην εφαρμογή ιδιοτήτων-θεωρημάτων, θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας και τις προϋποθέσεις ώστε αυτές να αληθεύουν.

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον αριθμό $\ln(a \cdot b)$ και οι a, b είναι αρνητικοί αριθμοί, τότε δεν έχει νόημα να γράψουμε

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b.$$

Μπορούμε όμως να γράψουμε

$$\ln(a \cdot b) = \ln((-a) \cdot (-b)) = \ln(-a) + \ln(-b),$$

όπου $a, b < 0$.

Σημαντική παρατήρηση

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$, ενώ καμία από τις f και g δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Έτσι, έχουμε το συμπέρασμα:

Σημείωση: Γινόμενο συναρτήσεων = μηδενική συνάρτηση

Το γινόμενο δύο μη μηδενικών συναρτήσεων μπορεί να είναι η μηδενική συνάρτηση.

Σε περίπτωση, λοιπόν, που ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε **δεν** μπορούμε να γράψουμε $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Επίσης, αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(x)^2 = g(x)^2 \quad (\text{ισοδύναμα } |f(x)| = |g(x)|),$$

τότε

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0,$$

αλλά **δεν** μπορούμε να πούμε ότι $[f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A]$ ή $[f(x) = -g(x) \text{ για κάθε } x \in A]$.

Σε περίπτωση, όμως, που είναι $f(x)^2 = g(x)^2$ και $f(x) \geq 0$, τότε και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ασκήσεις

1. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετασθεί αν ισχύει $f = g$. Αν όχι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

α') $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{x^2}{x}$

β') $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ και $g(x) = |x|^{\frac{4}{5}}$

γ') $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

δ') $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$

ε') $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ και $g(x) = -\sqrt[3]{-x}$

2. Να βρεθεί το πηλίκο των συναρτήσεων

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & x > 0 \\ x - 1, & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$$

3. Δύο περιττές συναρτήσεις f και g ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

α') Οι C_f και C_g διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β') Η γραφική παράσταση της $f \cdot g$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Απαντήσεις

1. Δεν είναι ίσες σε καμία περίπτωση.

α') Για $g(x) = \frac{x^2}{x}$, $D_g = \mathbb{R}^*$. Άρα $f = g$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β') $D_g = \mathbb{R}$, $D_f = [0, +\infty)$. Άρα $f = g$ στο $[0, +\infty)$.

γ') $D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = (0, +\infty)$. Για $x > 0$, έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} = g(x)$. Άρα $f = g$ στο $(0, +\infty)$.

δ') $D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = (0, +\infty)$. Άρα $f = g$ στο $(0, +\infty)$.

ε') Για $x < 0$ και $x = -b$, $f(x) = \frac{-b}{\sqrt[3]{(-b)^2}} = \frac{-b}{\sqrt[3]{b^2}} = -\sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{-x} = g(x)$. Άρα $f = g$ στο $(-\infty, 0)$.

2.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ \frac{x \cdot \ln x}{x+2}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x+2}, & x \leq 0, x \neq -2 \end{cases}$$

3. α') Για $x = 0$ η ισότητα $f(x) = f(-x)$ δίνει $f(0) = 0$. Ομοίως $g(0) = 0$. Άρα οι C_f και C_g διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β') Η $f \cdot g$ είναι άρτια, διότι $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.