

Μάθημα 05

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: **γ' Λυκείου κατεύθυνσης**

Ημερομηνία

24/09/2025

Σύνθεση συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση $g(x)$ ορίζεται όταν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .
 - Αν τώρα θέσουμε όπου x το $2x-1$, θα έχουμε μια νέα συνάρτηση, την $h(x) = g(2x-1)$, η οποία ορίζεται όταν $2x-1 \in D_g$.
 - Αν θέσουμε όπου x το $\ln x$, τότε η $h(x) = g(\ln x)$ ορίζεται όταν $x > 0$ και $\ln x \in D_g$.
 - Αν θέσουμε όπου x το $f(x)$, τότε η νέα συνάρτηση $h(x) = g(f(x))$ ορίζεται όταν $x \in D_f$ (για να ορίζεται η $f(x)$) και $f(x) \in D_g$.
- Η νέα αυτή συνάρτηση ονομάζεται **σύνθεση** της f με τη g .

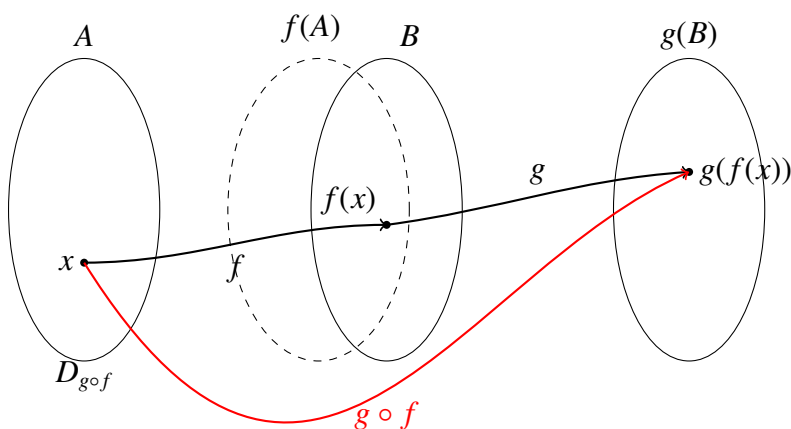
Ορισμός: Σύνθεση συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα. **Σύνθεση της f με την g** ονομάζεται η συνάρτηση $g \circ f$ με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο των στοιχείων του A , για τα οποία η εικόνα $f(x)$ ανήκει στο B , δηλαδή

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$



Προφανώς, η νέα συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται όταν υπάρχουν $x \in A$ με $f(x) \in B$, δηλαδή όταν ισχύει

$$f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

Σχόλια

1. Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, στη σύνθεση, έχουμε πρώτα τη f και μετά τη g . Αυτός είναι ο λόγος που την $g \circ f$ τη λέμε σύνθεση της f με τη g .
2. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι

$$D_{g \circ f} \subseteq D_f.$$

3. Η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η συνάρτηση $f \circ g$, έχει τύπο

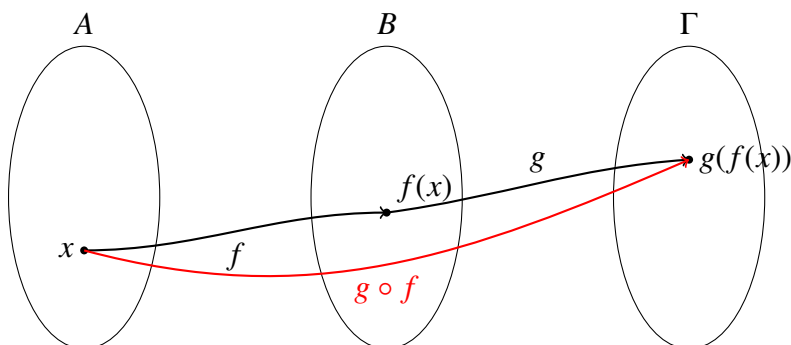
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

και πεδίο ορισμού

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \subseteq D_g.$$

4. Από τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \Gamma$ ορίζεται η συνάρτηση

$$g \circ f : A \rightarrow \Gamma.$$



Παράδειγμα 1

Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις: α) $g \circ f$, β) $f \circ g$, γ) $g \circ g$.

Λύση. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ και $D_g = (-\infty, 1]$.

α) Η $g \circ f$ ορίζεται όταν $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$, δηλαδή όταν $x \neq 2$ και

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 1.$$

Με $x \neq 2$ έχουμε

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 1 \iff \frac{x+1}{x-2} - 1 \leq 0 \iff \frac{3}{x-2} \leq 0 \iff x-2 < 0 \iff x < 2.$$

Έτσι, η $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 2)$ και τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - \frac{x+1}{x-2}} = \sqrt{\frac{-3}{x-2}} = \sqrt{\frac{3}{2-x}}.$$

β) Η $f \circ g$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, δηλαδή όταν $x \leq 1$ και $\sqrt{1-x} \neq 2$. Με $x \leq 1$ έχουμε

$$\sqrt{1-x} \neq 2 \iff 1-x \neq 4 \iff x \neq -3.$$

Επομένως, η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -3) \cup (-3, 1]$ και τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}-2}.$$

γ) Η $g \circ g$ ορίζεται όταν $x \in D_g$ και $g(x) \in D_g$, δηλαδή όταν $x \leq 1$ και $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$. Με $x \leq 1$ έχουμε

$$\sqrt{1-x} \leq 1 \iff 1-x \leq 1 \iff x \geq 0.$$

Επομένως $D_{g \circ g} = [0, 1]$ και

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{1-x}) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}.$$

Προσοχή!! Για την εύρεση π.χ. της συνάρτησης $g \circ f$, πρώτα βρίσκουμε αν ορίζεται, δηλαδή αν το σύνολο $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ έχει στοιχεία, και μετά βρίσκουμε τον τύπο της.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$, τότε $D_f = \mathbb{R}^+$, $D_g = [3, +\infty)$. Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \ln x \geq 3\}$ είναι το $[e^3, +\infty)$, οπότε ορίζεται η σύνθεση της f με την g .

Παράδειγμα 2

Δύο συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 5x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α') Αν $f(x) = 4x - 3$, να βρεθεί η $g(x)$.

β') Αν $g(x) = 4x - 3$, να βρεθεί η $f(x)$.

Λύση.

α') Ισχύει $f(g(x)) = 3x^2 - 5x + 1$ και $f(g(x)) = 4g(x) - 3$, οπότε έχουμε

$$4g(x) - 3 = 3x^2 - 5x + 1 \iff g(x) = \frac{3x^2 - 5x + 4}{4}.$$

β') Έχουμε $f(g(x)) = 3x^2 - 5x + 1$, δηλαδή $f(4x - 3) = 3x^2 - 5x + 1$ (1).

Αν θέσουμε $4x - 3 = w$, τότε $x = \frac{w+3}{4}$ και η (1) γράφεται

$$f(w) = 3\left(\frac{w+3}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{w+3}{4}\right) + 1.$$

Άρα

$$f(x) = \frac{3}{16}(x+3)^2 - \frac{5}{4}(x+3) + 1 = \frac{3}{16}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{11}{16}.$$

Σχόλια

- 1) Αν (1) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε αν θέσουμε όπου x το $\frac{x+3}{4}$ έχουμε

$$f\left(\frac{x+3}{4}\right) = 3\left(\frac{x+3}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{x+3}{4}\right) + 1,$$

δηλαδή

$$f(x) = \frac{3}{16}(x+3)^2 - \frac{5}{4}(x+3) + 1 = \dots$$

Η μέθοδος αυτή δεν είναι πάντα εφικτή (ούτε μια εύκολη πολλές φορές) και γι' αυτό προτιμούμε την προηγούμενη μεθοδολογία.

- 2) Πολύ συχνά, όμως, γνωρίζοντας την $f(g(x))$ και την $g(x)$, μπορούμε απευθείας να βρούμε την $f(x)$.

Για παράδειγμα:

- (i) Αν $f(2x) = 5x + 1$, τότε $f(2x) = \frac{5}{2}(2x) + 1$, οπότε $f(x) = \frac{5}{2}x + 1$.
- (ii) Αν $f(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$, τότε $f(x) = 1 - x^2$.
- (iii) Αν $f(\ln x) = 2 - 5x = 2 - 5e^{\ln x}$, τότε $f(x) = 2 - 5e^x$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την ισότητα

$$1 + f(x) + x \cdot f(-x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $1 + f(x) + x \cdot f(-x) = x$ (1)

Αφού η (1) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα αληθεύει και για τον $-x$, δηλαδή

$$1 + f(-x) + (-x) \cdot f(x) = -x \iff 1 + f(-x) - xf(x) = -x \iff f(-x) = -1 - x + x \cdot f(x). \quad (2)$$

Από (1) και (2) γράφεται

$$(1) + (2): 1 + f(x) + x \cdot (-1 - x + x \cdot f(x)) = x$$

$$\implies 1 + f(x) - x - x^2 + x^2 \cdot f(x) = x \text{ οπότε } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες που μας έδωσαν.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda x + 1}{x - 1}$ να ισχύει $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Λύση. Θέλουμε να ισχύει

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{1\} \quad (1) \quad \text{και} \quad f(f(x)) = x \quad (2).$$

Η $f \circ f$ ορίζεται όταν $x \in D_f$ και $f(x) \in D_f$, δηλ. $x \neq 1$ και $f(x) \neq 1$.

$$\text{Με } x \neq 1 \text{ έχουμε } f(x) = \frac{\lambda x + 1}{x - 1} \neq 1 \iff \lambda x + 1 \neq x - 1 \iff (\lambda - 1)x \neq -2 \quad (3)$$

Αν $\lambda = 1$, η (3) γράφεται $0 \neq -2$, που ισχύει.

$$\text{Αν } \lambda \neq 1, \text{ η (3), δίνει } x \neq \frac{-2}{(\lambda - 1)}, \text{ όπου θα πρέπει } x \neq 1 \implies \frac{-2}{(\lambda - 1)} = 1 \implies \lambda = -1$$

Άρα οι πιθανές τιμές είναι: $\lambda = \pm 1$.

$$\text{Επίσης } (f \circ f)(x) = x \implies (f(f(x))) = \frac{\lambda f(x) + 1}{f(x) - 1} = \frac{(\lambda^2 + 1)x^2 + (\lambda + 1)}{(\lambda - 1)x + 2} \text{ το οποίο δίνει } (f \circ f)(x) = x$$

αν $\lambda = 1$ ή $(f \circ f)(x) = -1$, αν $\lambda = -1$.

Άρα η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda = 1$.

Παράδειγμα 5

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)^3 = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ f$.

Λύση. Καταρχάς έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$$

Η $f \circ f$ ορίζεται όταν $x \in D_f$ και $f(x) \in D_f$. Επειδή $D_f = \mathbb{R}$, είναι και $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$. Ισχύει

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(\sqrt[3]{x-1}), & \text{αν } f(x) \geq 1 \\ f(-\sqrt[3]{1-x}), & \text{αν } f(x) < 1 \end{cases}$$

i) Ισχύει $f(x) \geq 1$ όταν $x - 1 \geq 1^3 \iff x \geq 2$. Τότε έχουμε

$$(f \circ f)(x) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x-1} - 1}.$$

ii) Ισχύει $0 \leq f(x) < 1$ όταν $0 \leq \sqrt[3]{x-1} < 1 \iff 1 \leq x < 2$. Τότε

$$(f \circ f)(x) = f(\sqrt[3]{x-1}) = -\sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{x-1}}.$$

iii) Τέλος, ισχύει $f(x) \leq 0$ όταν $f(x) = -\sqrt[3]{1-x}$, $x < 1$. Τότε έχουμε

$$(f \circ f)(x) = f(-\sqrt[3]{1-x}) = -\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1-x}}.$$

Άρα

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt[3]{x-1} - 1}, & x \geq 2, \\ -\sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{x-1}}, & 1 \leq x < 2, \\ -\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1-x}}, & x < 1. \end{cases}$$

Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις:

α') $f \circ g$

β') $g \circ f$

γ') $f \circ f$

δ') $g \circ g$

2. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-1, 2]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α') $g(x) = f(2x - 1)$

β') $g(x) = f(x^2 - 1)$

γ') $h(x) = f(\sqrt{x}) - 3f(\ln x)$

3. Δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x^2 - x$.

α') Αν $g(x) = 3 - 5x$, να βρεθεί η $f(x)$.

β') Αν $f(x) = 2x - 5$, να βρεθεί η $g(x)$.

4. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ g)(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$ και $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, τότε να βρεθεί η $f(x)$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
5. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x - 1$ και $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$, τότε να βρεθούν οι συναρτήσεις f και $f \circ f$.
6. Να επαληθεύσετε την προσεταιριστική ιδιότητα

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

για τις συναρτήσεις $h : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \Gamma$ και $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.

7. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α') $2f(x) - f(-x) = \sin 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β') $3f(x) - 2f(1-x) = 5x^3 - 6x^2 + 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 γ') $f(x) - 2f(-x) = \frac{3}{2}(e^x - e^{-x})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, να βρεθεί το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.

8. Αν $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ και $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$, να αποδειχθεί ότι η σύνθεση της f με τη g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ταυτοτική συνάρτηση.
9. Αν $f^3(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ f$.
10. Αν $f(x) = 2 - |x|$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ f$ και να γίνει η γραφική της παράσταση. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f \circ f$ καθώς και το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης. $f(f(x)) = \lambda$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
11. Αν $f(x) = \frac{ax}{x-2}$, να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f \circ f$ να είναι ταυτοτική στο σύνολο $\mathbb{R} - \{2\}$.
12. Αν $f(x) = ax + 1$ και $g(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$, να βρεθούν οι $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g \circ f = f \circ g$.
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - e^{-x}$ και $g(x) = \ln |\ln x|$.
- α') Να βρεθεί το σύνολο τιμών των f και g .
 β') Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.
 γ') Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η C_g βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.
 δ') Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
14. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.
- α') Αν η f είναι άρτια, να αποδειχθεί ότι και η $g \circ f$ είναι άρτια.
 β') Αν οι f και $g \circ f$ είναι περιττές, να αποδειχθεί ότι και η g είναι περιττή.
 γ') Αν οι f και g είναι περιττές, να αποδειχθεί ότι και η $g \circ f$ είναι περιττή.
15. Να βρεθεί η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ που επαληθεύει την ισότητα

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1.$$

Απαντήσεις

1. Για $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\alpha') (f \circ g)(x) = 3\sqrt{1 - x^2} - 2, \quad D_{f \circ g} = [-1, 1].$$

$$\beta') (g \circ f)(x) = \sqrt{1 - (3x - 2)^2}, \quad D_{g \circ f} = \{x : |3x - 2| \leq 1\} = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

$$\gamma') (f \circ f)(x) = 9x - 8, \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R}.$$

$$\delta') (g \circ g)(x) = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_{g \circ g} = [-1, 1].$$

2. Αν $D_f = \Delta = [-1, 2]$:

$$\alpha') D_g = \{x : 2x - 1 \in [-1, 2]\} = [0, \frac{3}{2}] \text{ για } g(x) = f(2x - 1).$$

$$\beta') D_g = \{x : x^2 - 1 \in [-1, 2]\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \text{ για } g(x) = f(x^2 - 1).$$

$$\gamma') D_h = \{x : \sqrt{x} \in [-1, 2] \text{ και } \ln x \in [-1, 2]\} = [0, 4] \cap [e^{-1}, e^2] = [e^{-1}, 4] \text{ για } h(x) = f(\sqrt{x}) - 3f(\ln x).$$

3. $(g \circ f)(x) = x^2 - x$.

$$\alpha') g(x) = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5f(x) = x^2 - x \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{3 - x^2 + x}{5}}.$$

$$\beta') f(x) = 2x - 5. \text{ Θέτουμε } y = f(x) = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{2}. \text{ Άρα}$$

$$g(y) = \left(\frac{y+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+5}{2}\right) = \frac{y^2 + 8y + 15}{4} \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{x^2 + 8x + 15}{4}}.$$

4. $(f \circ g)(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Θέτουμε $t = g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \in [0, 1)$. Τότε $x^2 = \frac{t}{1-t}$ και

$$\boxed{f(t) = \frac{t^2}{t^2 + (1-t)^2}}, \quad t \in [0, 1).$$

Άρα $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ και $f([0, 1)) = [0, 1)$.

5. $(g \circ f)(x) = x - 1$, $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 = (x - 2)^3 + 7$.

$$(f(x) - 2)^3 = x - 8 \Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt[3]{x-8} & , \quad x \geq 8 \\ 2 - \sqrt[3]{8-x} & , \quad x < 8 \end{cases}}.$$

Επομένως

$$\boxed{(f \circ f)(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{x-8} - 6} & , \quad x \geq 224 \\ 2 - \sqrt[3]{6 - \sqrt[3]{x-8}} & , \quad 8 \leq x < 224 \\ 2 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8-x}} & , \quad x < 8 \end{cases}}.$$

6. **Προσεταιριστικότητα.** Για $h : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \Gamma$, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε $x \in A$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

7. Βρείτε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της.

α') $2f(x) - f(-x) = \sin 2x$. Θέτοντας $A = f(x)$, $B = f(-x)$ και λύνοντας το σύστημα $\{2A - B = \sin 2x, 2B - A = \sin 2x\}$ παίρνουμε

$$\boxed{f(x) = \sin 2x}, \quad f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

β') $3f(x) - 2f(1-x) = 5x^3 - 6x^2 + 6x$ και $3f(1-x) - 2f(x) = 5(1-x)^3 - 6(1-x)^2 + 6(1-x)$. Λύνοντας ως προς $f(x)$ προκύπτει

$$\boxed{f(x) = x^3 + 2}, \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

γ') $f(x) - 2f(-x) = \frac{3}{2}(e^x - e^{-x})$. Με $A = f(x)$, $B = f(-x)$ λύση του $\{A - 2B = \frac{3}{2}(e^x - e^{-x}), B - 2A = -\frac{3}{2}(e^x - e^{-x})\}$ δίνει

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x}, \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

8. «Σύνθεση της f με τη g » = $g \circ f$. Έχουμε

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow 1 - |f(x)| = \frac{1}{1+|x|}.$$

Άρα

$$(g \circ f)(x) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{\frac{1}{1+|x|}} = x,$$

ορισμένο για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

$$9. f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ άρα } (f \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt[9]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[9]{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

10. Για $f(x) = 2 - |x|$ έχουμε

$$\boxed{(f \circ f)(x) = 2 - |2 - |x|| = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 2, \\ 4 - |x|, & |x| \geq 2, \end{cases}}$$

με σύνολο τιμών $(-\infty, 2]$.

Για τη $f(f(x)) = \lambda$ θέτουμε $y = |x| \geq 0$ και λύνουμε $2 - |2 - y| = \lambda \Leftrightarrow |2 - y| = 2 - \lambda$.

- Αν $\lambda > 2$: καμία λύση.
- Αν $\lambda = 2$: $y = 2 \Rightarrow x = \pm 2$ (δύο λύσεις).
- Αν $0 < \lambda < 2$: $y \in \{\lambda, 4 - \lambda\} \Rightarrow 4$ λύσεις.
- Αν $\lambda = 0$: $y \in \{0, 4\} \Rightarrow x \in \{0, \pm 4\}$ (τρεις λύσεις).
- Αν $\lambda < 0$: $y = 4 - \lambda > 0 \Rightarrow x = \pm(4 - \lambda)$ (δύο λύσεις).

11. $f(x) = \frac{ax}{x-2}$. Υπολογίζουμε

$$(f \circ f)(x) = \frac{a^2 x}{(a-2)x + 4}.$$

Για ταυτοτική ισότητα $(f \circ f)(x) = x$ σε $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ απαιτείται $a - 2 = 0$ και $a^2 = 4$. Άρα $\boxed{a = 2}$.

12. $f(x) = ax + 1$, $g(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$. Από $g \circ f = f \circ g$ ως πολυωνυμική ταυτότητα προκύπτει ο συντελεστής του x^4 ίσος με a^2 , άρα $a = 0$. Τότε $g(f(x)) = \frac{b}{2}$ και $f(g(x)) \equiv 1$, οπότε $\frac{b}{2} = 1$. Συνεπώς $\boxed{a = 0, b = 2}$.

13. $f(x) = e^x - e^{-x}$, $g(x) = \ln |\ln x|$.

α') $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (αύξουσα, άνω/κάτω χωρίς φράγμα). $D_g = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και $g(D_g) = \mathbb{R}$.

β') C_f κάτω από $x'x$ όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow (-\infty, 0)$.

γ') C_g πάνω από $x'x$ όταν $g(x) > 0 \Leftrightarrow |\ln x| > 1 \Rightarrow x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$.

δ') $(f \circ g)(x) = e^{\ln |\ln x|} - e^{-\ln |\ln x|} = |\ln x| - \frac{1}{|\ln x|}$, $x > 0$, $x \neq 1$.

14. Για $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$:

α') Αν f άρτια, τότε $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ (άρτια).

β') Αν f περιττή και $g \circ f$ περιττή, για $y = f(x)$ παίρνουμε $g(-y) = g(f(-x)) = (g \circ f)(-x) = -(g \circ f)(x) = -g(y)$. Άρα η g είναι περιττή στο $B' = f(A)$ (και, αν $B' = B$, στο B).

γ') Αν f και g περιττές, τότε $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$ (περιττή).

15. Να βρεθεί $f : \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1.$$

Θέτουμε $T(x) = \frac{x-1}{x+1}$, οπότε $(T \circ T)(x) = -\frac{1}{x}$.

Επίσης $(T \circ T \circ T)(x) = \frac{1+x}{1-x}$ και $(T \circ T \circ T \circ T)(x) = x$.

Φτιάχνω καινούριες εξισώσεις, βάζοντας στην εξίσωση που μου έδωσαν, στη θέση του x τα $\frac{x-1}{x+1}$, $-\frac{1}{x}$ και $\frac{1+x}{1-x}$.

Λύνω το σύστημα που προκύπτει από την δοθείσα και τις τρεις νέες εξισώσεις. Η λύση έχει πολλές πράξεις. Στο τέλος βρίσκω την $f(x)$.

$$\boxed{f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x^2 - 5x}}$$

η οποία ορίζεται, όπως ζητήθηκε, για $x \neq 0, \pm 1$.

Άσκηση 15

Να βρεθεί $f : \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1. \quad (\star)$$

Ιδέα. Θέτουμε $T(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (μετασχηματισμός Möbius). Η αντικατάσταση $x \mapsto T(x)$ κρατά ρητές συναρτήσεις του ίδιου «τύπου». Έτσι ζητάμε f ως ρητή συνάρτηση μικρού βαθμού. Επειδή το $xf(x)$ είναι βαθμού 1 πάνω από βαθμού 2 και το $f(T(x))$ έχει την ίδια μορφή με $f(x)$, δοκιμάζουμε

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex}, \quad (e \neq 0) \quad (1)$$

ώστε να αποκλείονται $x = 0, 1$ από το πεδίο ορισμού (όπως ζητείται).

Υπολογισμός. Με $T(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και το (1),

$$f(T(x)) = \frac{aT(x)^2 + bT(x) + c}{dT(x)^2 + eT(x)}.$$

Η (★) γράφεται

$$x \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex} + 2 \frac{aT^2 + bT + c}{dT^2 + eT} = 1.$$

Φέρνουμε σε κοινό παρονομαστή και απλοποιούμε. Η εξίσωση ταυτοσημίας που προκύπτει ισοδυναμεί (μετά από ανάπτυξη και ομαδοποίηση κατά δυνάμεις του x) με το γραμμικό σύστημα:

$$a(d+e) = 0$$

$$3bd + be + 2cd - d^2 - de = 0$$

$$-3ad + ae - 2bd + 2be + 5cd + 3ce + 2d^2 - de - e^2 = 0$$

$$2ad - 4ae - bd - be + 4ce - d^2 + 3de = 0$$

$$2ae - 2be + cd + ce - de + e^2 = 0.$$

Η f δεν αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το ίδιο μη μηδενικό σταθερό. Άρα, χωρίς βλάβη γενικότητας θέτουμε $e = 1$ και λύνουμε το (Σ1)–(Σ5) ως προς a, b, c, d . Παίρνουμε μοναδική λύση

$$a = -\frac{4}{5}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = -\frac{1}{5}, \quad d = -1.$$

Συνεπώς

$$f(x) = \frac{-\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}}{-x^2 + x} = \frac{4x^2 - x + 1}{5(x^2 - x)}, \quad x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}. \quad (\text{A})$$

Έλεγχος. Με $T(x) = \frac{x-1}{x+1}$,

$$x \frac{4x^2 - x + 1}{5(x^2 - x)} + 2 \frac{4T(x)^2 - T(x) + 1}{5(T(x)^2 - T(x))} = 1,$$

οπότε η (★) επαληθεύεται ταυτοτικά (οι πράξεις δίνουν μηδενικό αριθμητή).

Τελικό αποτέλεσμα. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι

$$\boxed{f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5(x^2 - x)}}, \quad x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}.$$