

Μάθημα 06

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

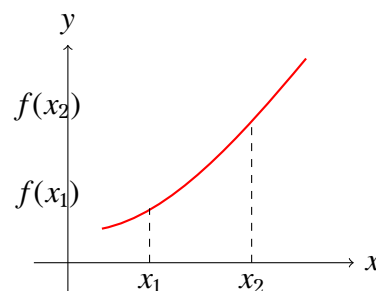
Ημερομηνία

25/09/2025

Μονότονες συναρτήσεις

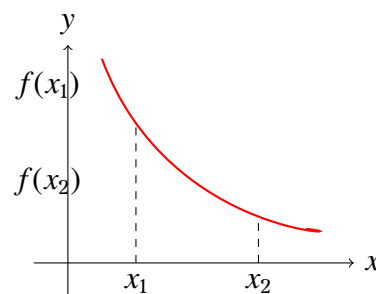
Ορισμός: Γνησίως αύξουσα στο Δ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
Συμβολικά: $f \uparrow \Delta$.



Ορισμός: Γνησίως φθίνουσα στο Δ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
Συμβολικά: $f \downarrow \Delta$.



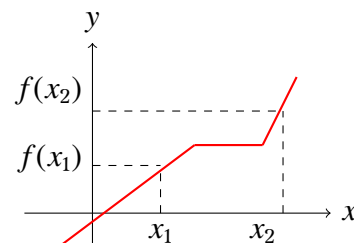
Ορισμός: Γνησίως μονότονη στο Δ

Μια γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο Δ , ονομάζεται **γνησίως μονότονη** στο Δ .

- Επιπλέον, δίνουμε και τους παρακάτω ορισμούς.

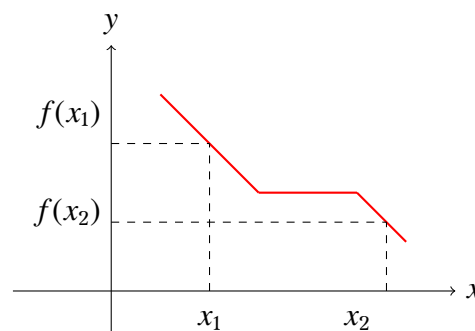
Ορισμός: Αύξουσα στο Δ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Συμβολικά: $f \uparrow \Delta$.



Ορισμός: Φθίνουσα στο Δ

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Συμβολικά: $f \downarrow \Delta$.



Ορισμός: Μονότονη στο Δ

Μια αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση ονομάζεται γενικά **μονότονη** στο Δ.

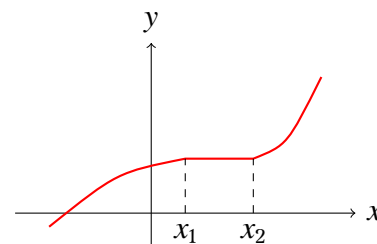
Σημείωση: Γνησίως μονότονη

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε λέμε απλώς ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Σχόλια

1. Στο μάθημα της γ' λυκείου Θα ασχοληθούμε με γνησίως μονότονες και όχι με μονότονες συναρτήσεις.

Η συνάρτηση του διπλανού σχήματος είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε, όμως, να πούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ και σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$.



2. Μια βασική μέθοδος για να διαπιστώσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ, είναι οι εξής:

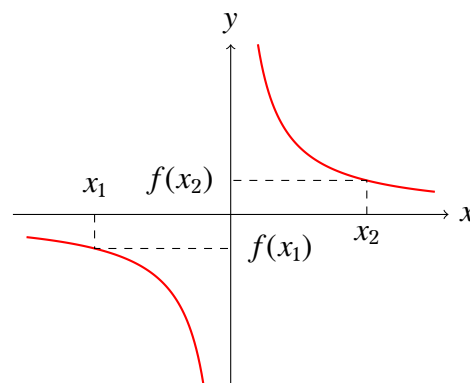
- (i) Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ και μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x_1) - f(x_2)$.
- (ii) Εξετάζουμε την ισοδυναμία $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ή $f(x_1) \geq f(x_2)$).
- (iii) Βρίσκουμε το πρόσημο του λόγου $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Αν $\lambda > 0$ τότε $f \uparrow \Delta$. Αν $\lambda < 0$ τότε $f \downarrow \Delta$.
- (iv) Με $x_1, x_2 \in \Delta$ και $x_1 < x_2$, παίρνουμε την ανίσωση $f(x_1) < f(x_2)$ και ισοδύναμα καταλήγουμε ότι αληθεύει ή είναι αδύνατη.

3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε δε συμβαίνει το ίδιο και με το σύνολο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Πράγματι, για $x_1 < 0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι: **Η μονοτονία μιας συνάρτησης εξετάζεται σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.**

**4) Η μονοτονία των βασικών συναρτήσεων θεωρείται γνωστή**

Για παράδειγμα, έχουμε:

- (α') Η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β') Η $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(γ') Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\frac{\pi}{2}\right]$.

(δ') Η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, +\frac{\pi}{2}\right]$.

(ε') Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ η $g(x) = -\sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ίδιο διάστημα.

(ς') Η $f(x) = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(ζ') Η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(x) = c$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.

Πράγματι, αν $f(x_1) = f(x_2) = c$ με $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$, άτοπο.

Ισχύει, λοιπόν, το εξής:

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα x' το πολύ σ' ένα σημείο.

Παράδειγμα 1

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

$$\alpha') f(x) = \ln x + x^3$$

$$\beta') f(x) = e^{-x^2} - \sqrt{x}$$

Λύση

α') Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta$ ισχύει $\ln x_1 < \ln x_2$ και $x_1^3 < x_2^3$, οπότε $\ln x_1 + x_1^3 < \ln x_2 + x_2^3$. Δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

β') Για κάθε $x_1 < x_2 \in [0, +\infty)$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2$ και συνεπώς $e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2}$. Επίσης, $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Οπότε $e^{-x_1^2} - \sqrt{x_1} > e^{-x_2^2} - \sqrt{x_2}$. Δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Συνεπώς $f \downarrow [0, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

Λύση

Πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αφού ισχύει $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ έχουμε

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} - 1} - \frac{e^{x_2}}{e^{x_2} - 1} = \frac{e^{x_1}(e^{x_2} - 1) - e^{x_2}(e^{x_1} - 1)}{(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} - 1)} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} - 1)}.$$

Αν $x_1 < x_2 < 0$, τότε $e^{x_1} > e^{x_2}$ και $e^{x_1}, e^{x_2} < 1$, οπότε $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Άρα $f \downarrow (-\infty, 0)$.

Αν $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 > 0$, τότε $e^{x_1} < e^{x_2}$ και $e^{x_1}, e^{x_2} > 1$, οπότε $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $2x^7 + 3x^3 = 5$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $2x^7 + 3x^3 - 5 = 0$.

Η συνάρτηση $f(x) = 2x^7 + 3x^3 - 5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διότι για κάθε $x_1 < x_2$ ισχύει $2x_1^7 < 2x_2^7$ και $3x_1^3 < 3x_2^3$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f(1) = 0$, μοναδική ρίζα είναι η $x = 1$.

Σημείωση:

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται συχνά σε εξισώσεις που δεν μπορούν να επιλυθούν με τις μεθόδους της Άλγεβρας που μάθαμε στις προηγούμενες τάξεις.

Παράδειγμα 4

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} < 4x - 2x^2.$$

Λύση. Η ανίσωση γράφεται

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 4x < \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} - 2x^2.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε η ανίσωση γράφεται

$$f(2x) < f(x^2). \quad (1)$$

Επίλυση ανίσωσης της μορφής $f(g(x)) < f(h(x))$ με τη μονοτονία της f .

Εξετάζουμε τη f ως προς τη μονοτονία. Για κάθε $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$, οπότε

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} - 2x_1 > \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} - 2x_2,$$

άρα $f(x_1) > f(x_2)$, δηλ. $f \downarrow \mathbb{R}$.

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και ταυτόχρονα ισχύει η σχέση (1), τότε $2x > x^2$. Έτσι,

$$x^2 - 2x < 0 \iff x(x - 2) < 0 \iff x \in (0, 2).$$

Παράδειγμα 5

α') Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \rightarrow (0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g : A \rightarrow (0, +\infty)$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

β') Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}$.

Λύση (α)

Για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και $g(x_1) > g(x_2)$. Επειδή $g(x_1), g(x_2) > 0$, έχουμε

$$\frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}.$$

Οι ανισότητες $\frac{f(x_1)}{1} < \frac{f(x_2)}{1}$ και $\frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$ έχουν θετικά μέλη, οπότε τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και παίρνουμε

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \Rightarrow \boxed{h \uparrow A}.$$

(β)

Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}$, δηλαδή, ότι η $h(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Αυτό συμβαίνει, διότι η $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$, η $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$ και οι f, g παίρνουν θετικές τιμές στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα 6

Αν δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g \circ f$.

Λύση

Από τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται η $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Έστω $f \uparrow A$ και $g \uparrow B$. Για κάθε $x_1 < x_2 \in A$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, δηλ. $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$. Άρα $g \circ f \uparrow A$.

ii) Έστω $f \downarrow A$ και $g \uparrow B$. Τότε $x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2))$. Άρα $g \circ f \downarrow A$.

iii) Έστω $f \uparrow A$ και $g \downarrow B$. Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι $g \circ f \downarrow A$.

iv) Έστω $f \downarrow A$ και $g \downarrow B$. Τότε $x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$. Άρα $g \circ f \uparrow A$.

Ασκήσεις

1. Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

α') Η συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β') Αν f είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(0) < f(1) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$.

γ') Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(1, 2)$, τότε $f \downarrow \mathbb{R}$.

δ') Η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

ε') Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ς') Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η $f^2 = f \circ f$ είναι γνησίως μονότονη.

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α') $f(x) = \frac{1}{x-1}$

β') $f(x) = \frac{1}{x^3} - \ln x$

γ') $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α') $x^9 + 2x^5 = 3$

β') $x^3 + 2x = 3 + \ln \frac{1}{x}$

γ') $e^x = 1 - x^3$

δ') $e^x + \ln(x+1) = 1$

4. Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι ανισώσεις:

α') $x^{10} + 2x^2 > 32x^5 + 4x$

β') $e^{1-2x} - e^{-3x} > -3(x+1)$

5. Αν $f \uparrow \mathbb{R}$, να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση: $f(x^2 + 1) + f(2 - 3x) < f(3x + 1) + f(2 - x^2)$

6. Αν $f \downarrow \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι: $f(x^2 + 2) - f(-x^2) < f(1 + \eta\mu x) - f(1 - \eta\mu x)$

7. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

α') Αν $f \uparrow A$ και $g \uparrow A$, να αποδειχθεί ότι $f + g \uparrow A$.

β') Αν $f \downarrow A$ και $g \uparrow A$, να αποδειχθεί ότι $f + g \downarrow A$.

γ') Αν οι f, g παίρνουν θετικές τιμές και είναι γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας, να μελετηθεί η $\frac{f}{g}$ ως προς τη μονοτονία.

8. α') Αν $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu \alpha - \sigma\upsilon\nu \beta > \alpha^2 - \beta^2$.

β') Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{3}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{4}\right)^\beta > \alpha^3 - \beta^3$.

9. Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - \frac{x}{3}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

10. Αν μια άρτια ή περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq (0, +\infty)$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f στο διάστημα $(-\beta, -\alpha)$.

11. Αν $f(x) = 2^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g = (f \circ f) \circ f$.
12. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ η $h(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
13. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g \downarrow$, όπου $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
14. Να λυθεί στο διάστημα $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ η ανίσωση: $e^{\frac{1}{\eta\mu x}} - e^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} > \eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x$
15. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 2f(x) = x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- α') $f \uparrow \mathbb{R}$
 β') $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Απαντήσεις

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Λ
2. α') $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $f \downarrow (-\infty, 1)$ και $f \downarrow (1, +\infty)$
 β') $f(x) = \frac{1}{x^3} - \ln x$, $f'(x) = -\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f \downarrow (0, +\infty)$
 γ') $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, \frac{\pi}{2})$
3. α') $x^9 + 2x^5 = 3 \Rightarrow x = 1$
 β') $x^3 + 2x = 3 + \ln \frac{1}{x}$ έχει μοναδική λύση $x = 1$
 γ') $e^x = 1 - x^3$ έχει μοναδική λύση $x = 0$
 δ') $e^x + \ln(x+1) = 1$ έχει μοναδική λύση $x = 0$
4. α') $x^{10} + 2x^2 > 32x^5 + 4x \Rightarrow f(x) = x^{10} - 32x^5 + 2x^2 - 4x \Rightarrow$ λύση $x < 0$ ή $x > 2$
 β') $e^{1-2x} - e^{-3x} > -3(x+1)$ ισοδύναμα $f(x) = e^{-2x+1} + 3x + 3 - e^{-3x} > 0$, που ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$
5. Η ανίσωση $f(x^2 + 1) + f(2 - 3x) < f(3x + 1) + f(2 - x^2)$ γίνεται $g(x^2) < g(3x)$ για $g(x) = f(x+1) - f(2-x)$. Θα δείξω ότι g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η ανίσωση $g(x^2) < g(3x)$, γίνεται $x^2 < 3x$ που ισχύει για κάθε $x \in (0, 3)$.
6. Η ανίσωση $f(x^2 + 2) - f(-x^2) < f(1 + \eta\mu x) - f(1 - \eta\mu x)$ γίνεται $g(x^2 + 1) < g(\eta\mu x)$ για $g(x) = f(1+x) - f(1-x)$. Θα δείξω ότι g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Η ανίσωση $g(x^2 + 1) < g(\eta\mu x)$, γίνεται $x^2 + 1 > \eta\mu x$ που ισχύει για κάθε x .
7. α') Αν $f \uparrow A$ και $g \uparrow A$, τότε $f + g \uparrow A$
 β') Αν $f \downarrow A$ και $g \uparrow A$, τότε $f + g \downarrow A$
 γ') Αν $f > 0$, $g > 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τη f και αντίθετο από τη g
8. α') Από την $\sigma\upsilon\nu\alpha < \alpha$, προκύπτει $\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta > \alpha^2 - \beta^2$
 β') Από την $(\frac{3}{4})^x > 1 - x$, προκύπτει $(\frac{3}{4})^\alpha - (\frac{3}{4})^\beta > \alpha^3 - \beta^3$
9. $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - \frac{x}{3} > 1 = f(0) \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$ γιατί $f \downarrow$.

10. Η f στο $(-\beta, -\alpha)$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με το (α, β) λόγω συμμετρίας (άρτια/περιττή).
11. Για $f(x) = 2^{-x} - x$, η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα $g = (f \circ f) \circ f$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
12. Από $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, προκύπτει ότι $g(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα και $h(x) = f(x) - x$ γνησίως φθίνουσα.
13. Αν $f < g$ και $g \downarrow$, τότε $(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
14. Η ανίσωση $e^{\frac{1}{\eta\mu x}} - e^{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} > \eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x$ είναι μεσω της $f(x) = e^{1/x} - x^3$ ισοδύναμη της $f(\eta\mu x) > f(\sigma\upsilon\nu x)$ η οποία δίνει $x \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$.
15. α') Θεωρώ την $g(x) = x^3 + 2x$ η οποία είναι $g \uparrow \mathbb{R}$. Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow f^3(x_1) + 2f(x_1) < f^3(x_2) + 2f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$ και επειδή $g \uparrow$ έχω $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε $f \uparrow$.
- β') Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχω $x = y^3 + 2y + 3$, που είναι $x - 3 = y^3 + 2y$, δηλαδή $g(f(x)) = g(y)$ άρα $f(x) = y$, άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.