

Μάθημα 07

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

02/10/2025

Ολικά ακρότατα συναρτήσεων

Ορισμός: ολικό μέγιστο

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο** σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται (ολικό) μέγιστο της f .

Ορισμός: ολικό ελάχιστο

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ παρουσιάζει (ολικό) **ελάχιστο** σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται (ολικό) ελάχιστο της f .

Ορισμός: ολικά ακρότατα

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f , αν υπάρχουν, ονομάζονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

Προσοχή! Αν για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(x) \geq c$, όπου c σταθερός αριθμός, δε σημαίνει ότι η f έχει ελάχιστο το c . Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in D_f$ με $f(x_0) = c$. Κάτι ανάλογο ισχύει και για το μέγιστο.

Αναφέρουμε απλά παραδείγματα στα ακρότατα:

α') Η $f(x) = |x|$ έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| \geq 0 = f(0)$.

β') Η $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ έχει ελάχιστο το $f(1) = -1$, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq -1 = f(1)$.

γ') Η $f(x) = 3x - x^2$ γράφεται $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$. Επειδή $-\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$ ισχύει $f(x) \leq \frac{9}{4} = f\left(\frac{3}{2}\right)$ και άρα η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

δ') Η $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο το $f\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ και μέγιστο το $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

ε') Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κανένα ακρότατο.

ς') Στο παράδειγμα 2 του μαθήματος 2 βρήκαμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Για $y = f(x) = 3$ βρίσκουμε $x = 1$, ενώ για $y = \frac{1}{3}$ βρίσκουμε $x = -1$. Άρα, η f έχει ελάχιστο το $f(-1) = \frac{1}{3}$ και μέγιστο το $f(1) = 3$.

Σχόλια

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ δεν έχει κανένα ακρότατο.
2. Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε έχει ελάχιστο το $f(\alpha)$ και μέγιστο το $f(\beta)$. Αν η $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε έχει ελάχιστο το $f(\beta)$ και μέγιστο το $f(\alpha)$.
3. Η εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης, προς το παρόν, μπορεί να γίνεται με την εύρεση του συνόλου τιμών της.

Παράδειγμα 1 Να βρεθούν οι $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - \theta}{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$ να έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 3 .

Λύση:

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f . Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται $y = \frac{\alpha x - \theta}{x^2 + 4} \Leftrightarrow$
 $yx^2 + 4y = \alpha x - \theta \Leftrightarrow yx^2 - \alpha x + (4y + \theta) = 0$ (1)

Αν $y = 0$, η (1) δίνει $x = \frac{\theta}{\alpha} \in D_f$, οπότε $y = 0 \in f(\mathbb{R})$.

Αν $y \neq 0$, η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4y(4y + \theta) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $16y^2 + 4\theta y - \alpha^2 \leq 0$. (2)

Το 1ο μέλος της (2) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta_1 = 16(\theta^2 + 4\alpha^2) > 0$$

και ρίζες

$$y_{1,2} = \frac{-\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8}.$$

Έτσι, η (2) αληθεύει όταν

$$\frac{-\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8} \leq y \leq \frac{-\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8},$$

που σημαίνει ότι η f έχει ελάχιστο το $\frac{-\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8}$ και μέγιστο το $\frac{-\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8}$.

Έχουμε, λοιπόν, το σύστημα

$$\frac{-\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8} = -2 \quad (3), \quad \frac{-\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\alpha^2}}{8} = 3 \quad (4).$$

Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη, βρίσκουμε $\theta = -4$, οπότε η (4) γράφεται

$$\frac{4 + \sqrt{4\alpha^2 + 16}}{8} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{4\alpha^2 + 16} = 20 \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 16 = 400 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pm 4\sqrt{6}}.$$

Παράδειγμα 2

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x, \quad a, b \in \mathbb{R}^*,$$

έχει ελάχιστο το $-\sqrt{a^2 + b^2}$ και μέγιστο το $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Λύση

- **Καταρχάς δείχνουμε ότι $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, δηλ. $|f(x)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.**

Με πράξεις,

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq \sqrt{a^2 + b^2} &\iff (a\eta\mu x + b\sigma\upsilon\nu x)^2 \leq a^2 + b^2 \\ &\iff a^2\eta\mu^2 x + 2ab\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + b^2\sigma\upsilon\nu^2 x \leq a^2 + b^2 \\ &\iff a^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + 2ab\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + b^2\sigma\upsilon\nu^2 x \leq a^2 + b^2 \\ &\iff a^2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2ab\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + b^2\eta\mu^2 x \geq 0 \\ &\iff (a\sigma\upsilon\nu x - b\eta\mu x)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που είναι αληθές για κάθε x . Άρα $|f(x)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

- **Ύπαρξη τιμών ίσων με τα άκρα.**

Εξετάζουμε αν υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ με $|f(x)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Αυτό συμβαίνει όταν $a\sigma\upsilon\nu x - b\eta\mu x = 0$, δηλ. $\epsilon\phi x = \frac{a}{b}$.

Η $\epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$ και η εξίσωση $\epsilon\phi x = \frac{a}{b}$ έχει (μέσα σε κάθε διάστημα μήκους π) ακριβώς μία λύση. Στα σημεία αυτά $|f(x)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Άρα, πράγματι, η f έχει ελάχιστο το $-\sqrt{a^2 + b^2}$ και μέγιστο το $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

α') $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

γ') $f(x) = -x^2 + x + 2$

ε') $f(x) = e^x + e^{-x}$

β') $f(x) = x^2 - 2x + 3$

δ') $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

ς') $f(x) = 2x^3 + 5x - 1$

2. Να αποδειχθεί ότι $|\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| \leq 2$ και στη συνέχεια να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi).$$

3. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x + 1}$ να έχει ελάχιστο -1 και μέγιστο 3 .

4. Χαρακτηρίστε με «Σωστό» ή «Λάθος» καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

α') Επειδή $\eta\mu x \leq 1$ και $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$ ισχύει $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει μέγιστο το 2 .

β') Αν μια συνάρτηση f έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 2 , τότε η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 2]$.

- γ') Δεν υπάρχει συνάρτηση, της οποίας τα ακρότατα συμπίπτουν.
δ') Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.
ε') Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 2$, τότε η f έχει ελάχιστο το 2.

Απαντήσεις

- α') Μέγιστο το $f(1) = 2$.
β') Ελάχιστο το $f(1) = 2$.
γ') Μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.
δ') Ελάχιστο το $f(-1) = -1$ και μέγιστο το $f(1) = 1$.
ε') Ελάχιστο το $f(0) = 2$.
ς') Δεν έχει (η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).
- Από το Παράδειγμα 2: μέγιστο το $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2$ και ελάχιστο το $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2$.
- Λύνοντας όπως στο Παράδειγμα 1, προκύπτουν τα ζεύγη
 $(\alpha, \beta) = (-3, 0)$ ή $(\alpha, \beta) = (3, 3)$.
- Λύσεις Σ/Λ:** α) Λ, β) Λ, γ) Λ (η σταθερή συνάρτηση αποτελεί αντιπαράδειγμα), δ) Λ, ε) Λ.