

# Μάθημα 08

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

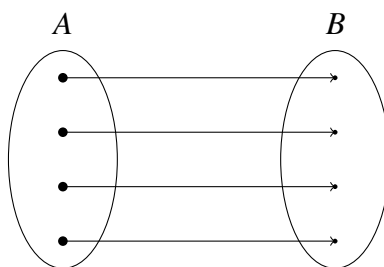
Ημερομηνία

**03/10/2025**

## Συναρτήσεις «1-1»

### Ορισμός: συνάρτηση 1-1

Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **συνάρτηση 1-1** ή **αμφιμονοσήμαντη**, όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .



**Άμεσες συνέπειες του ορισμού:**

α') Μια συνάρτηση  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει:

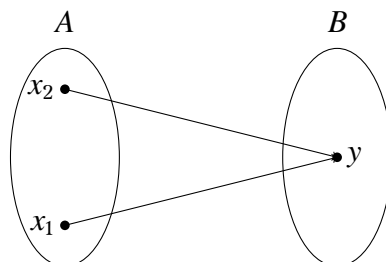
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$  είναι 1-1, αφού  $\frac{3x_1+2}{x_1-1} = \frac{3x_2+2}{x_2-1} \iff$

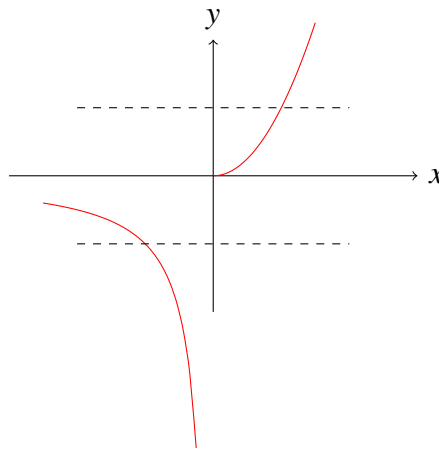
$$(3x_1+2)(x_2-1) = (3x_2+2)(x_1-1) \iff 3x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2 - 2 = 3x_1x_2 - 3x_2 + 2x_1 - 2$$

$$\iff -5x_1 = -5x_2 \iff x_1 = x_2.$$

β') Αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in D_f$  με  $x_1 \neq x_2$  και  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε η  $f$  **δεν είναι 1-1**. Για παράδειγμα, η  $f(x) = x^3 - 8x = (x^3 - 8x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  δεν είναι 1-1, αφού  $f(0) = f(2) = 0$  και  $0 \neq 2$ .



γ') Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε  $y \in f(A)$  η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει μοναδική λύση ως προς  $x \in A$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία της  $C_f$  με ίδιες τεταγμένες. Άρα, αν η  $f$  είναι 1-1, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την  $C_f$  το πολύ σε ένα σημείο και αντιστρόφως.



δ') Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, διότι για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει είτε  $f(x_1) < f(x_2)$  είτε  $f(x_1) > f(x_2)$ , δηλαδή για  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

#### Σημείωση: Προσοχή!

Δεν ισχύει το αντίστροφο της τελευταίας πρότασης, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 που δεν είναι γνησίως μονότονες. Για παράδειγμα, μια τέτοια συνάρτηση είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

με την γραφική παράσταση στο παραπάνω παράδειγμα γ).

#### Σημείωση: Προσοχή!

Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  ισχύουν **πάντα**:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ ή το αντίστροφο } f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

αντίθετα, **δεν** ισχύουν πάντα:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ή το αντίστροφο } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

τα οποία ισχύουν μόνο στις 1-1 συναρτήσεις.

#### Σημείωση: Προσοχή!

Για μια 1-1 συνάρτηση  $f$  ισχύουν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2.$$

**Παράδειγμα 1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

ορίζεται στο  $\mathbb{R}$  και είναι 1-1.

**Λύση:** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $x^2 + 1 > 0$  και  $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geq 0$  (διότι  $|x| \geq -x$ ), οπότε  $D_f = \mathbb{R}$ .

Αν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}) &= \ln(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) \iff x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} \iff \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} = x_2 - x_1 \Rightarrow \\ (\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1})^2 &= (x_2 - x_1)^2 \iff x_1^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} + x_2^2 + 1 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 \iff \\ \sqrt{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} &= 1 + x_1x_2 \Rightarrow (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) = (1 + x_1x_2)^2 \iff x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = 1 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \iff \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 &= 0 \iff (x_1 - x_2)^2 = 0 \iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Άρα, η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1.

## Παράδειγμα 2

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $2e^{-x} - x^3 = \lambda$  έχει το πολύ μία ρίζα στο  $\mathbb{R}$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Λύση:** Έστω  $f(x) = 2e^{-x} - x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $-x_1 > -x_2$ , οπότε  $e^{-x_1} > e^{-x_2}$  και  $-x_1^3 < -x_2^3$ . Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε  $f(x_1) > f(x_2)$ , δηλαδή  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα η  $f$  είναι 1-1, που σημαίνει ότι παίρνει κάθε τιμή το πολύ σε ένα σημείο. Επομένως η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει το πολύ μία ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

## Παράδειγμα 3

Να λυθεί στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση  $x^5 + 3x = 32x^5 + 6x$ .

**Λύση:** Αν  $f(x) = x^5 + 3x$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $f(x) = f(2x)$ . (1)

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα είναι 1-1. Από την (1) προκύπτει  $x = 2x$ , δηλαδή  $x = 0$ .

Συνεπώς η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα  $x = 0$ .

**Σημείωση: τέχνασμα επίλυσης εξίσωσης**

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί τέχνασμα για την επίλυση εξίσωσης της μορφής  $f(g(x)) = f(h(x))$  όπου η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1.

## Παράδειγμα 4

Αν οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow B$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η  $g \circ f$  είναι 1-1.

**Λύση:** Η συνάρτηση  $g \circ f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$  έχουμε

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Επειδή η  $g$  είναι 1-1, έπεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Επειδή και η  $f$  είναι 1-1, έχουμε  $x_1 = x_2$ .

Άρα η  $g \circ f$  είναι 1-1.

## Παράδειγμα 5

Αν μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση  $g(x) = f^5(x) + f^3(x) + f(x)$  είναι 1-1.

**Λύση:** Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $g(x_1) = g(x_2)$ . Τότε

$$f^5(x_1) + f^3(x_1) + f(x_1) = f^5(x_2) + f^3(x_2) + f(x_2).$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} & (f(x_1) - f(x_2))(f^4(x_1) + f^3(x_1)f(x_2) + f^2(x_1)f^2(x_2) + f(x_1)f^3(x_2) + f^4(x_2)) \\ & + (f(x_1) - f(x_2))(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)) + (f(x_1) - f(x_2)) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Αν  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , τότε το (1) γράφεται ως άθροισμα τριών θετικών όρων, άτοπο. Άρα πρέπει να ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Εφόσον η  $f$  είναι 1-1, έπεται  $x_1 = x_2$ . Συνεπώς, η  $g$  είναι συνάρτηση 1-1.

**Σημείωση: τέχνασμα για την απόδειξη ότι είναι 1-1**

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί τέχνασμα για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι 1-1. Μας βοηθά όταν στη συνάρτηση/εξίσωση εμφανίζονται μόνο μονές δυνάμεις.

Θυμίζουμε την επόμενη ταυτότητα η οποία ισχύει για εκθέτη περιττό αριθμό:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

## Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω είναι συναρτήσεις 1-1:

α')  $f(x) = 2x^3 - 3$

δ')  $f(x) = \ln(x) + x^2$

β')  $f(x) = 1 - 2x^2, x < 0$

ε')  $f(x) = e^{1-x} - \ln x$

γ')  $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$

ς')  $f(x) = x^3 + x + 1$

2. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις **δεν** είναι 1-1:

α')  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

γ')  $f(x) = x^5 - x^4 + 2$

β')  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\eta x$

δ')  $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

3. Να λυθούν στο  $\mathbb{R}$  οι εξισώσεις:

α')  $\eta\mu^5 x - \sigma\upsilon\eta^5 x = 3(\sigma\upsilon\eta x - \eta\mu x)$

β')  $x^9 + 2x^3 = 8x^3 + 4x$

γ')  $e^{2x-1} - \frac{1}{e^x} = 3(1 - 3x)$

4. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και η  $f \circ f$  είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η  $f$  είναι 1-1.

5. Αν μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση  $g(x) = f^3(x) + 2f(x)$  είναι 1-1.

6. α') Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x^3$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

β') Έστω συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $(g \circ g)(x) = e^x + x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $g$  είναι 1-1.

γ') Να βρεθεί συνάρτηση  $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει

$$h^3(x) + e^{h(x)} = x + \ln^3 x, \quad \forall x > 0.$$

7. Να λυθεί στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  η εξίσωση

$$e^{x^{-3}} - e^{2/x} = \frac{x^3}{8}(8x^6 - 1).$$

## Απαντήσεις

1. α') Αν  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , άρα  $f$  1-1.

β') Αν  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ , αφού  $x_1, x_2 < 0$ , άρα  $f$  1-1.

γ') Αν  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1^2 - 2x_1)(x_2 + 2) = (x_2^2 - 2x_2)(x_1 + 2) \Rightarrow x_1 = x_2$ , άρα  $f$  1-1.

δ') άθροισμα από γνησίως αύξουσες, άρα  $f$  1-1.

ε') άθροισμα από γνησίως φθίνουσες, άρα  $f$  1-1.

ς') χρησιμοποιώ το τέχνασμα με την ταυτότητα  $a^v - b^v$ , άρα  $f$  1-1.

2. α')  $f(1) = f(-1)$ , άρα  $f$  δεν είναι 1-1.

β')  $f(0) = f(\pi/2)$ , άρα  $f$  δεν είναι 1-1.

γ')  $f(0) = f(1)$ , άρα  $f$  δεν είναι 1-1.

δ')  $f(1) = f(-1)$ , άρα  $f$  δεν είναι 1-1.

3. α') Αν  $f(x) = x^5 + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

β') Αν  $f(x) = x^2 + 2x$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $f(x^3) = f(2x) \Rightarrow x = 0$  ή  $x = \pm \sqrt{2}$ .

γ') Αν  $f(x) = e^x + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $f(2x - 1) = f(-x) \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ .

4. Αν  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε  $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ , δηλαδή  $(f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$ . Συνεπώς  $x_1 = x_2$ , άρα  $f$  είναι 1-1.

5. Όπως το Παράδειγμα 5.

6. α') Αν  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow g(g(x_1)) = g(g(x_2))$ , δηλαδή  $f(x_1) = f(x_2)$ , οπότε  $x_1 = x_2$ .

β')  $f(h(x)) = f(\ln(x)) \Leftrightarrow h(x) = \ln(x)$ .

7. Αν  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x^3$ , η εξίσωση γράφεται  $f(\frac{x}{2}) = f(x^3)$ , οπότε  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .