

Μάθημα 09

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

08/10/2025

Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός: Αντίστροφη συνάρτηση

Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ είναι 1-1, τότε για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ με $f(x) = y$. Έτσι, ορίζεται μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ το μοναδικό στοιχείο $x \in A$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

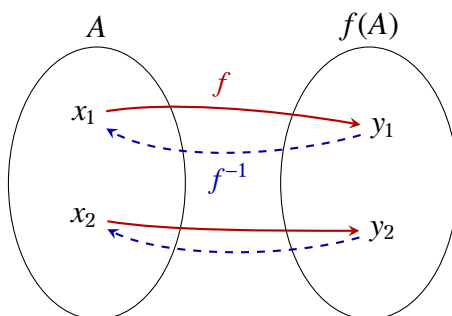
Σημείωση:

Προφανώς ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Επομένως, έχουμε και τις ταυτότητες: $f^{-1}(f(x)) = x$ και $f(f^{-1}(y)) = y$

Ορισμός: Αντιστρέψιμη συνάρτηση

Αν η f είναι συνάρτηση 1-1, τότε ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και λέμε ότι η f είναι **αντιστρέψιμη** ή **αντιστρέφεται**.



Πρόταση

Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Απόδειξη: Ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Επομένως, αν ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη C_f , τότε το σημείο $N(y, x)$ ανήκει στη $C_{f^{-1}}$. Όμως τα σημεία M και N είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$. Αυτό σημαίνει ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης, εφόσον υπάρχει.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι 1-1, οπότε είναι αντιστρέψιμη.

Ήδη έχουμε αναφέρει την ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Αυτό δείχνει ότι παίρνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x :

$$f(x) = y \Rightarrow 3x - 2 = y \Rightarrow x = \frac{y + 2}{3}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Επειδή αλλάζουμε ρόλους στις μεταβλητές, έχουμε τελικά

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γενικά, για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, εργαζόμαστε ως εξής:

Διαδικασία

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1, οπότε είναι αντιστρέψιμη.
- Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x , βρίσκοντας παράλληλα το σύνολο τιμών της f , που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} . Έτσι έχουμε $x = f^{-1}(y)$, $y \in f(A)$, και άρα η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x)$ με $x \in f(A)$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \leq 0.$$

Λύση: Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε:

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2^2 + 1} \Rightarrow x_1^2(x_2^2 + 1) = x_2^2(x_1^2 + 1) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2.$$

Επειδή $x_1, x_2 \leq 0$, έχουμε $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1.

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2^2 + 1} \Rightarrow x_1^2(x_2^2 + 1) = x_2^2(x_1^2 + 1) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (αφού } x_1, x_2 \leq 0)$$

Άρα η f είναι 1-1, δηλαδή αντιστρέψιμη.

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = y \Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2(y - 1) = -y - 1 \quad (1)$$

Αν $y = 1$, η (1) προφανώς είναι αδύνατη. Αν $y \neq 1$, η (1) γράφεται

$$x^2 = \frac{1 + y}{1 - y}$$

και έχει λύση στο $(-\infty, 0]$ διότι $(1 + y)(1 - y) > 0$ και $y \neq 1$. Άρα $y \in [-1, 1)$ και είναι τότε

$$x = -\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}, \quad y \in [-1, 1).$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, \quad x \in [-1, 1).$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(υπερβολική εφαπτομένη).

Λύση: Επειδή $e^x > 0$ και $e^{-x} > 0$, είναι $e^x + e^{-x} > 0$, οπότε $D_f = \mathbb{R}$.

Ισχύει:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1, και επομένως υπάρχει η f^{-1} .

Η εξίσωση $y = f(x)$ γράφεται:

$$y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^{2x}(y - 1) = -y - 1 \quad (1)$$

Αν $y = 1$, η (1) είναι αδύνατη. Αν $y \neq 1$, η (1) γράφεται:

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

και έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\frac{1+y}{1-y} > 0$, δηλαδή $y \in (-1, 1)$.

Τότε ισχύει

$$2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$

δηλαδή

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1).$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = (x-2)^2 - 4, \quad x \geq 2,$$

και να γίνει η γραφική παράσταση των f και f^{-1} στο ίδιο σχήμα.

Λύση: Ισχύει $f(x) = (x-2)^2 - 4$, $x \in [2, +\infty)$.

- Αν $x_1, x_2 \geq 2$ και $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $(x_1-2)^2 = (x_2-2)^2$, και επειδή $x_1, x_2 \geq 2$, έχουμε $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1, οπότε είναι αντιστρέψιμη.

- Η εξίσωση $y = f(x)$ γράφεται: $y = (x-2)^2 - 4 \Rightarrow (x-2)^2 = y+4$ (1)

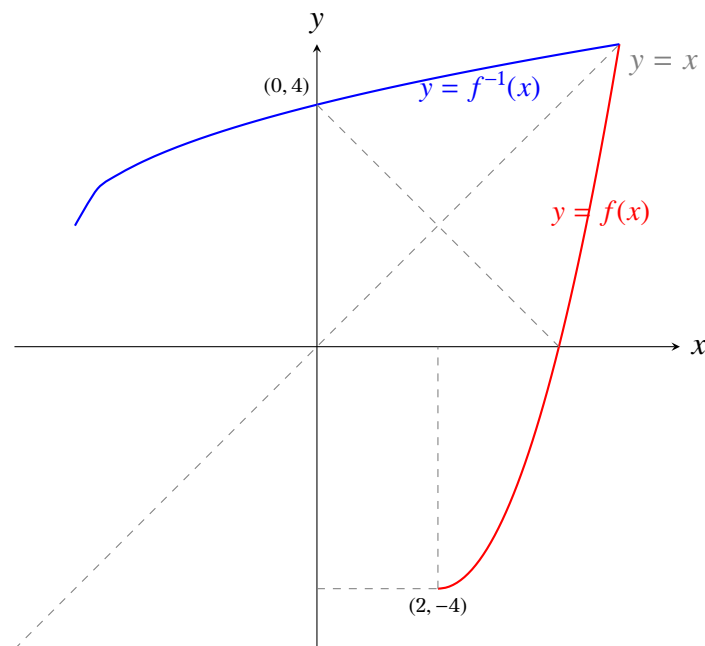
Η (1) έχει λύση, αν και μόνο αν $y \geq -4$, και επειδή $x \geq 2$, είναι $(x-2) = \sqrt{y+4}$, δηλαδή

$$x = 2 + \sqrt{y+4}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4.$$

Κατασκευάζουμε μία από τις C_f , $C_{f^{-1}}$ και στη συνέχεια τη συμμετρική της ως προς την ευθεία $y = x$.



Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία $(2, -4)$ και $(4, 0)$, η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $(-4, 2)$ και $(0, 4)$. Φυσικά, διέρχονται και από το κοινό σημείο των $y = x$.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Λύση: Ισχύει $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $(x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3$, οπότε $x_1 = x_2$. Άρα, η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέψιμη.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ γράφεται:

$$y = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow (x-1)^3 = y-1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt[3]{y-1}, & y \geq 1, \\ x = 1 - \sqrt[3]{1-y}, & y < 1. \end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1, \\ 1 - \sqrt[3]{1-x}, & x < 1. \end{cases}$$

Σημείωση:

Η εξίσωση $x^{2\nu+1} = a$ με $\nu \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ έχει πάντοτε ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2, & x \leq 1, \\ \frac{x+1}{2}, & x > 1. \end{cases}$$

Λύση:

- Για $x \leq 1$ ισχύει $f(x) = -(x-1)^2 + 1 = 1 - (x-1)^2$.
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι 1-1.

Προσοχή!

Έχουμε τρεις περιπτώσεις!

- (i) Αν $x_1, x_2 \leq 1$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$, άρα $x_1 = x_2$ (αφού $x_1, x_2 \leq 1$).
- (ii) Αν $x_1, x_2 > 1$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $\frac{x_1+1}{2} = \frac{x_2+1}{2}$, άρα $x_1 = x_2$.
- (iii) Αν $x_1 \leq 1$ και $x_2 > 1$, οπότε $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \leq 1$ και $f(x_2) > 1$, άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

- Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

(i) Αν $x \leq 1$, τότε $1 - (x-1)^2 = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-y}$, με $y \leq 1$.

(ii) Αν $x > 1$, τότε $\frac{x+1}{2} = y \Rightarrow x = 2y - 1$, με $y > 1$.

Άρα

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1, \\ 2x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Θεώρημα – Σχέση μονοτονίας συνάρτησης και αντιστρόφου

Θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση, που συσχετίζει τη μονοτονία δύο αντίστροφων συναρτήσεων. Η πρόταση αυτή δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο, αλλά όταν χρησιμοποιείται, θα πρέπει να αιτιολογείται.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε και η συνάρτηση f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f .

Απόδειξη: Για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$

Έστω ότι $f \uparrow A$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1} \uparrow f(A)$. Επειδή

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

προκύπτει ότι f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Ομοίως, αν $f \downarrow A$, τότε $f^{-1} \downarrow f(A)$.

Σχόλιο

Στην περίπτωση που έχουμε γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , εξηγείται γιατί τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$. Και η πρόταση αυτή δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν τα κοινά τους σημεία (αν υπάρχουν) πάνω στην ευθεία $y = x$.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή έχουν ακριβώς τις ίδιες ρίζες.

- Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, οπότε ισχύει $f(x_0) = x_0$ και $x_0 = f^{-1}(x_0)$, δηλαδή $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

Άρα, το x_0 είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

- Έστω τώρα x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, οπότε ισχύει $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$, δηλαδή $f(f(x_0)) = x_0$.

Θα δείξω ότι το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή ότι $f(x_0) = x_0$.

Αν $f(x_0) > x_0$, αφού $f \uparrow A$, ισχύει $f(f(x_0)) > f(x_0)$, δηλαδή $x_0 > f(x_0)$, άτοπο. Ομοίως, αν $f(x_0) < x_0$, οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα $f(x_0) = x_0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Παράδειγμα 6

Αν $f(x) = 3x^3 - 2$, να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $x_1^3 < x_2^3$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα $f \uparrow \mathbb{R}$, οπότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$, δηλαδή είναι τετμημένες οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$.

Η εξίσωση αυτή γράφεται $3x^3 - x - 2 = 0$ και έχει μοναδική ρίζα $x = 1$. Με το σχήμα Horner, η εξίσωση γράφεται $(x - 1)(3x^2 + 3x + 2) = 0$, η οποία δίνει μόνο την $x = 1$.

Άρα, οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(1, 1)$.

Παράδειγμα 7

Αν μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, να αποδειχθεί ότι και η f^{-1} είναι περιττή.

Λύση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = -f(x)$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $y \in f(\mathbb{R})$ ισχύει $-y \in f(\mathbb{R})$ και $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Πράγματι, για κάθε $y \in f(\mathbb{R})$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = y$, οπότε:

$$\text{i) } -y = -f(x) = f(-x) \in f(\mathbb{R})$$

$$\text{ii) } f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

Άρα, η f^{-1} είναι περιττή.

Παράδειγμα 8

Έστω δύο αντιστρέψιμες συναρτήσεις

$$f : A \rightarrow B \quad \text{και} \quad g : B \rightarrow \Gamma$$

με $f(A) = B$ και $g(B) = \Gamma$. Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση $g \circ f$ είναι αντιστρέψιμη και ότι:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Λύση:

Η συνάρτηση $g \circ f : A \rightarrow \Gamma$ είναι 1-1 (βλ. παράδειγμα 4, μάθημα 8), οπότε είναι και αντιστρέψιμη και έχει πεδίο ορισμού το A .

Από τις συναρτήσεις $f^{-1} : B \rightarrow A$ και $g^{-1} : \Gamma \rightarrow B$ ορίζεται και η σύνθεση $f^{-1} \circ g^{-1} : \Gamma \rightarrow A$. Έτσι, οι συναρτήσεις $(g \circ f)^{-1}$ και $f^{-1} \circ g^{-1}$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Γ .

Για κάθε $z \in \Gamma$ υπάρχουν $y \in B$ και $x \in A$ με

$$z = g(y) \quad \text{και} \quad y = f(x),$$

οπότε $(g \circ f)(x) = z$.

Επίσης, έχουμε:

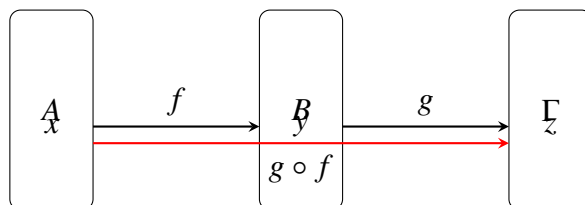
$$(g \circ f)^{-1}(z) = x \quad \text{και} \quad (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x.$$

Επομένως,

$$(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z),$$

για κάθε $z \in \Gamma$, οπότε προκύπτει ότι:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$



Παράδειγμα 9

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η f^{-1} , αφού αποδειχθεί ότι ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f^3(x_1) + f^2(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f^2(x_2) + f(x_2)$ ή $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Άρα, η f είναι 1-1 και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Να αποδείξουμε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, δηλαδή ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = y$.

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{1}{2}(y^3 + y^2 + y + 1)$ και έχουμε:

$$y^3 + y^2 + y = 2x - 1 \iff f^3(x) + f^2(x) + f(x) = y^3 + y^2 + y.$$

Άρα, η f^{-1} ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Για να προκύψει από την (1) ο τύπος της $f^{-1}(x)$, αρκεί να αποδειχθεί ότι η $g(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x + 1)$ είναι 1-1.

Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, τότε έχουμε:

$$x_1^3 + x_1^2 + x_1 = x_2^3 + x_2^2 + x_2$$

και συνεπώς $x_1 = x_2$ (βλ. απόδειξη στο μάθημα 8). Άρα η g είναι 1-1 και η f είναι g^{-1} .

Έτσι, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση

Ο τύπος της f^{-1} μπορεί να βρεθεί και ως εξής:

Στην ισότητα $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 2x - 1$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$$[f(f^{-1}(x))]^3 + [f(f^{-1}(x))]^2 + f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) - 1$$

δηλαδή $x^3 + x^2 + x = 2f^{-1}(x) - 1$ και άρα $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x + 1)$.

Παράδειγμα 10

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα x' μόνο σ' ένα σημείο, να αποδειχθεί ότι:

α') $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x > 0$.

β') Η f είναι αντιστρέψιμη

γ') ισχύει $f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) f^{-1}(b)$ για κάθε $a, b \in f(\mathbb{R})$.

Λύση:

i) Έχουμε την ιδιότητα $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1)

$$\text{Ισχύει } f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι $f(1) = 0$.

Για $x = 1$, η (1) δίνει $f(1) = f(1) + f(1)$, δηλαδή $f(1) = 0$.

Επίσης, για $x, y > 0$, η (1) δίνει $f(xy) = f(x) + f(y)$, οπότε $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

ii) Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα x' μόνο σε ένα σημείο, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα, η οποία είναι η $x = 1$, αφού $f(1) = 0$.

Αν $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1$$

Άρα $x_1 = x_2$, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

iii) Για κάθε $a, b \in f(\mathbb{R})$ υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) = a$ και $f(y) = b$, οπότε $a + b = f(x) + f(y)$.

Ισχύει:

$$f^{-1}(a + b) = f^{-1}(f(x) + f(y)) \stackrel{(1)}{=} f^{-1}(f(xy)) = xy = f^{-1}(a) f^{-1}(b).$$

Ασκήσεις

- Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες και βρείτε την αντίστροφη καθεμιάς απ' αυτές:

$$\alpha') f(x) = x^2 - 1, \quad x > 0$$

$$\beta') f(x) = x^3 + 1$$

$$\gamma') f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\delta') f(x) = 3e^x - 2$$

$$\varepsilon') f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$$

$$\varsigma') f(x) = 3 - 2 \ln(x+1)$$

$$\zeta') f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$$

$$\eta') f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 3 \\ 2x-4, & x < 3 \end{cases}$$

$$\theta') f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ x^2 - 4x + 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\iota') f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

2. Να βρεθεί η αντίστροφη των συναρτήσεων:

$$\alpha') f(x) = e^{2x} + e^x + 1$$

$$\gamma') f(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

$$\beta') f(x) = 4^x + 2^x + 6$$

3. Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = x(x^2 - 6x + 12)$, $x \in \mathbb{R}$ και να γίνει η γραφική παράσταση των f και f^{-1} στο ίδιο σχήμα.

4. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1)x + \beta$ να έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της.

5. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & x < 0 \\ -2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι αντιστρέψιμη, και μετά να βρεθεί η f^{-1} .

6. Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 + \frac{2}{x^2} + 5 \text{ για κάθε } x > 0.$$

7. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$, να βρεθεί η f^{-1} και να σχεδιαστούν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σχήμα και να βρεθούν τα κοινά τους σημεία.

8. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $2x^3 + 1 = -\sqrt[3]{\frac{1-x}{2}}$

9. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρεθεί.

10. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $(f \circ f)(x) = xf(x)$ για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(1) = 1$.

11. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(1) = f(0)$.

12. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α') Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β') Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(ax + b) = a \cdot f(x) + b$.

13. Έστω αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = a \cdot f(x^3 - 1) + b$, με $a \neq 0$, είναι ορισμένη στο $(1, +\infty)$ και είναι αντιστρέψιμη με

$$g^{-1}(x) = \left[1 + f^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right) \right]^{\frac{1}{3}}.$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α') Να συζητηθούν οι τιμές $f(\eta\mu 1)$ και $f(\sigma\upsilon\nu 1)$.
- β') Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(3)$.
- γ') Να λυθεί η ανίσωση $f(1 + f^{-1}(x)) < 3$.
- δ') Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 2x^6 + x^2$ βρίσκεται κάτω από την C_f .
- ε') Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ g)(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι αντιστρέψιμη.
- ς') Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu x = 2(x^2 + 1)^3 + x^2 + 1$.

15. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- α') Η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = -f(x)$.
- β') Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- γ') Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- α') Να αποδειχθεί ότι η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι περιττή.
- β') Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1} .
- γ') Να λυθεί η εξίσωση $(f \circ f)(x) = 0$.
- δ') Να λυθεί η ανίσωση $(f \circ f)(x) > \ln 2$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

- α') Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .
- β') Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- γ') Να χαραχθούν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

18. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α') Να βρεθεί η τιμή $f(0)$.
- β') Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

19. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε το πεδίο ορισμού της καθεμιάς να ισούται με το σύνολο τιμών της άλλης. Να αποδειχθεί ότι οι g και f αποτελούν ζεύγος αντιστρόφων συναρτήσεων, αν και μόνο αν $g(f(x)) = x$ και $f(g(x)) = x$.

20. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + 2e^{f(x)} = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α') Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β') Να αποδειχθεί ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- γ') Να βρεθούν ι) η τιμή $f(0)$ και ιι) το πρόσημο της f .
- δ') Να βρεθεί η αντίστροφη της f .

Απαντήσεις

1. α') $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}, \quad x > -1$

β') $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$

γ') $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}, \quad x \neq 2$

δ') $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3}\right), \quad x > -2$

ε') $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{1-x}\right), \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

ς') $f^{-1}(x) = e^{-\frac{3-x}{2}} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

ζ') $f^{-1}(x) = 2x^2 - x^4, \quad x \in [0, 1]$

η') $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x+2, & x < 2 \end{cases}$

θ') $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ x+1, & x < 1 \end{cases}$

ι') $f^{-1}(x) = \frac{2}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

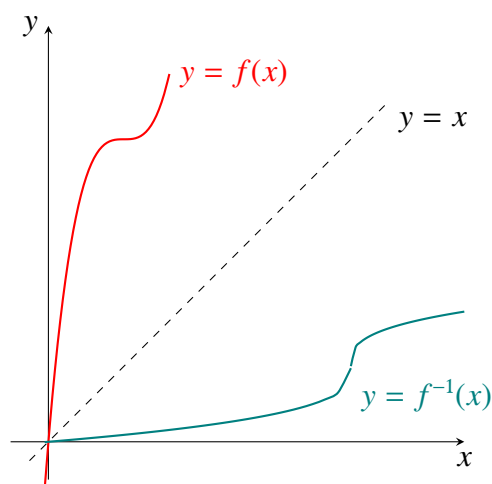
2. α') $f \uparrow \mathbb{R}, \quad f(x) = y \Rightarrow (e^x + \frac{1}{2})^2 = y - \frac{3}{4}, \quad \text{άρα } f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right), \quad x > 1.$

β') Ομοίως $f^{-1}(x) = \log_2\left(\sqrt{x - \frac{23}{4}} - \frac{1}{2}\right), \quad x > 6$

γ') $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \ln(1 - e^x), \quad x < 0.$

3. $f(x) = (x-2)^3 + 8$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt[3]{x-8}, & x \geq 8, \\ 2 - \sqrt[3]{8-x}, & x < 8. \end{cases}$



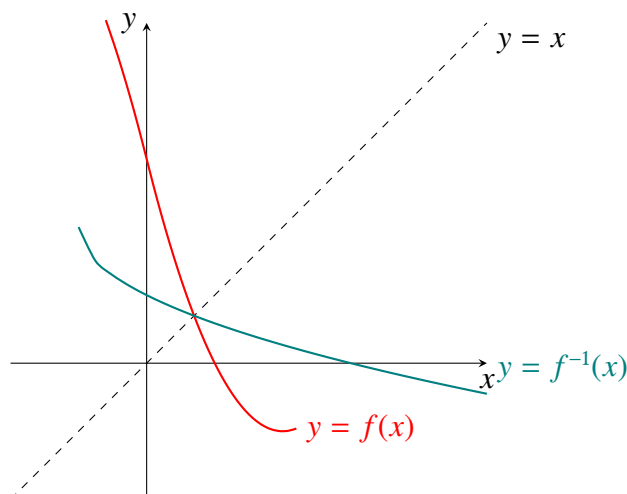
4. $f^{-1}(x) = \frac{x-\beta}{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R}$, όταν $\alpha \neq 1$. Η ιδιότητα $f(x) = f^{-1}(x)$ δίνει ταυτότητα πολυωνύμων και βρίσκουμε α) $\alpha = 2$, $\beta = 0$ ή β) $\alpha = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

5. Για $x_1 < x_2$ είναι $f(x) = \alpha x + 2$. Για $\alpha > 0$ είναι $f(x) \uparrow$, ενώ για $\alpha < 0$ είναι $f(x) \downarrow$. Τελικά, για $\alpha < 0$:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\alpha}, & x \leq 2 \\ \frac{2-x}{\alpha}, & x > 2 \end{cases}$$

6. Θέτω όπου x το $\frac{1}{x}$ και από το σύστημα βρίσκω $f(x) = x^2 + 1$ οπότε $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, $x > 1$.

7. $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \leq 2$. Για να οριζείται η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$, προφανώς θα πρέπει να ορίζονται οι f και f^{-1} , οπότε $f(x) = f^{-1}(x)$ ορίζεται στο $x \in [1, 2]$ και η λύση της είναι ίδια με της $x = f^{-1}(x)$ άρα την $x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13})$. Άρα κοινό σημείο είναι $A\left(\frac{1}{2}(5 - \sqrt{13}), \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13})\right)$.



8. Η εξίσωση ορίζεται για $x \leq 1$. Η $f(x) = 2x^3 + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}, & x \geq 1, \\ -\sqrt[3]{\frac{1-x}{2}}, & x < 1. \end{cases}$$

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$ για $x \leq 1$, η οποία έχει μοναδική λύση $x = -1$.

9. Η f είναι 1-1, ισχύει $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (βλ. παράδειγμα 9) και $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2 + x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ άρα $x_1 f(x_1) = x_2 f(x_2)$, οπότε $x_1 = x_2$. Ακόμα, $f(f(1)) = f(1)$ άρα $f(1) = 1$, αφού η f είναι 1-1. Ομοίως, $f^{-1}(1) = 1$.

11. Η $g(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Προφανώς $f(f(x)) = g(x)$, οπότε αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1.

Για $x = 0$ έχουμε $f(f(0)) = g(0) = 1$, οπότε $f(0) = f^{-1}(1)$.

12. α) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow ax_1 + \beta = ax_2 + \beta \Rightarrow x_1 = x_2$, δηλ. f είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμη.

β) $f(f(x)) = ax + \beta \Rightarrow f(f(f(x))) = f(ax + \beta) \Rightarrow af(x) + \beta = f(ax + \beta)$.

13. Η g ορίζεται όταν $x^3 - 1 > 0$, δηλ. $x > 1$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1^3 - 1) = f(x_2^3 - 1) \Rightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ οπότε η } g \text{ είναι 1-1.}$$

$$\text{Αν } y = a f(x^3 - 1) + b \Rightarrow f(x^3 - 1) = \frac{y-b}{a} \Rightarrow x^3 - 1 = f^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right) \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + f^{-1}\left(\frac{y-b}{a}\right)}.$$

14. α') $f \uparrow \mathbb{R}$. Επειδή $1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύει γνησίως ημ1 > συν1, οπότε $f(\eta\mu 1) > f(\sigma\upsilon\nu 1)$.

$$\beta') f(1) = 3, \text{ άρα } f^{-1}(3) = 1.$$

$$\gamma') f(1 + f^{-1}(x)) < 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) < 0 \Leftrightarrow x < f(0) = 0.$$

$$\delta') h(x) < f(x) \Rightarrow f(x^2) < f(x) \Rightarrow x^2 < x \Rightarrow 0 < x < 1.$$

$$\varepsilon') g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow g(g(x_1)) = g(g(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ δηλ. η } g \text{ είναι 1-1.}$$

$$\zeta') f(\sigma\upsilon\nu x) = f(x^2 + 1) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = x^2 + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ αφού } \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \text{ και } x^2 + 1 \geq 1 \text{ και είναι ίσα για } x = 0..$$

15. α') $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 = -x_2$, δηλ. f αντιστρέφω.

Στην $f(f(x)) = -x$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ οπότε το ζητούμενο.

β') Αν $f \uparrow \mathbb{R}$, τότε για x_1, x_2 έχουμε

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow x_1 > x_2,$$

άτοπο. Αν $f \downarrow \mathbb{R}$, ομοίως.

$$\gamma') \text{ Ισχύει } f(f(-x)) = x \Rightarrow f(-x) = f^{-1}(x) = -f(x).$$

16. α') ορίζεται για κάθε πραγματικό. Το δείξαμε στο παραδειγμα 2 στο μαθημα 8.

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0, \text{ ενώνω λογάριθμους και βγαίνει.}$$

$$\beta') \text{ Η } f \text{ είναι 1-1 (όπως στο παράδειγμα 1, μάθημα 8). } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma') f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 = f(0) \Leftrightarrow x = 0.$$

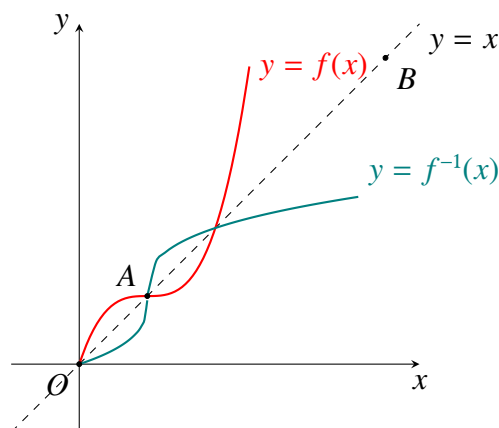
$$\delta') f^{-1} \uparrow, f(f(x)) > \ln 2 \Rightarrow f(x) > f^{-1}(\ln 2) \Rightarrow f(x) > \frac{3}{4} \Rightarrow x > \frac{1}{2}(e^{3/4} - e^{-3/4}).$$

$$17. \alpha) f(x) = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1, \\ 1 - \sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}.$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και αντιστρέφω. Η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Για τα κοινά σημεία θα ισχύει $f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$.

Άρα τα κοινά σημεία είναι $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 2)$.

γ) Η C_f προκύπτει από την ύλη της β' λυκείου με μετατόπιση της γνωστής συνάρτησης x^3 . Η $C_{f^{-1}}$ θα είναι συμμετρική της C_f ως προς την $y = x$. Άρα προκύπτει το γράφημα:



18. α') $f(f(0)) = 2 \cdot 0 = 0$. Έστω $f(0) = \alpha \Rightarrow f(f(0)) = f(\alpha) \Rightarrow 2 \cdot 0 = f(\alpha)$, οπότε $f(f(\alpha)) = f(0) \Rightarrow f(0) = 2\alpha$, ενώ θέσαμε f . Άρα τελικά $\alpha = 0$, δηλ. $f(0) = 0$.
- β') Στην $f(f(x)) = 2x$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$.
19. • Αν η κάθε μία είναι αντίστροφη της άλλης, τότε θα έχω $g = f^{-1}$, οπότε $f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Αντίστοιχα αφού $f = g^{-1}$, οπότε $g(f(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$.
- Αν για κάθε x ισχύει $g(f(x)) = x$ τότε θα έχω: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε η g είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Τότε όμως $f^{-1}(f(x)) = x = g(f(x))$, για κάθε $f(x)$, άρα $f^{-1} = g$, αφού έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
- Ομοίως αν για κάθε x ισχύει $f(g(x)) = x$ τότε θα έχω: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Τότε όμως $g^{-1}(g(x)) = x = f(g(x))$, για κάθε $g(x)$, άρα $g^{-1} = f$, αφού έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
20. α') Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = x + 2e^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς. Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) + 2e^{f(x_1)} < f(x_2) + 2e^{f(x_2)} \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$. Επειδή $g \uparrow$ προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ που σημαίνει ότι $f \uparrow$.
- β') Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ θεωρώ τον αριθμό $x = y + 2e^y - 2 \Rightarrow x + 2 = y + 2e^y \Rightarrow f(x) + 2e^{f(x)} = y + 2e^y \Rightarrow g(f(x)) = g(y)$. Όμως, $g \uparrow$ άρα $f(x) = y$. Άρα για κάθε πραγματικό y , υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$, δηλ. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- γ') $f(0) + 2e^0 = 2 \Rightarrow g(f(0)) = g(0)$, με g 1-1, άρα $f(0) = 0$.
- δ') Αφού $f \uparrow$ θα έχω $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$. Ομοίως για $x < 0$ θα έχω $f(x) < 0$.
- ε') Βάζοντας στη σχέση που δόθηκε αντί του x το $f^{-1}(x)$, παίρνω:
 $f(f^{-1}(x)) + 2e^{f(f^{-1}(x))} = f^{-1}(x) + 2 \Rightarrow x + 2e^x = f^{-1}(x) + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2 + 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$