

Μάθημα 10

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: **γ' Λυκείου κατεύθυνσης**

Ημερομηνία

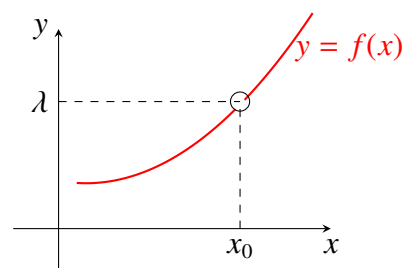
14/10/2025

Πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Θεωρούμε μια συνάρτηση f , ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αν οι τιμές της f πλησιάζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό λ , καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν, με οποιονδήποτε τρόπο, το $x_0 \in \mathbb{R}$, χωρίς να είναι ίσες με x_0 , τότε λέμε ότι **η f έχει όριο στο x_0 τον αριθμό λ** και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$



- Αν οι τιμές της f πλησιάζουν όσο θέλουμε τον λ , καθώς το x πλησιάζει το x_0 με $x > x_0$, τότε ονομάζουμε το όριο αυτό **δεξιό όριο** της f στο x_0 και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$$

- Όμοια, για $x < x_0$ ορίζουμε το **αριστερό όριο** της f στο x_0 και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda$$

Το δεξιό και το αριστερό όριο της f στο x_0 ονομάζονται **πλευρικά όρια** της f στο x_0 , τα οποία ικανοποιούν τα εξής:

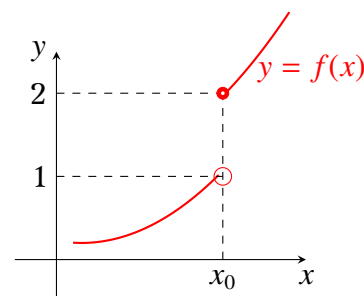
- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$

2) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, τότε η f δεν έχει όριο στο x_0 .

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 2,$$

οπότε η f δεν έχει όριο στο x_0 .



• Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 ή υπάρχει (οπότε είναι μοναδικό) ή δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το όριο *δεν υπάρχει*.

• Για να μιλάμε για όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ ή (a, x_0) ή (x_0, b) και το x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
Με απλά λόγια, θα πρέπει η f να είναι ορισμένη **κοντά στο** x_0 .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [1, +\infty)$. Μπορούμε να μιλάμε για όρια της f στα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \sqrt{3}$, αλλά δεν έχει νόημα να μιλάμε για όριο στο σημείο $x_4 = 0$ ή $x_5 = -1$.

• Αν η f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής (a, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, b) , τότε ορίζεται μόνο το *αριστερό όριο* της f στο x_0 . Ανάλογα αν ορίζεται μόνο στο δεξιό, ορίζεται μόνο το *δεξιό όριο* της f στο x_0 .

• Δεν αναφέρουμε τον ορισμό του ορίου, αφού δε διδάσκεται πλέον στο Λύκειο. Αναφέρουμε όμως μερικές *βασικές ιδιότητες*:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \iff \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \lambda] = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lambda$$

Παράδειγμα. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αν υπάρχει, στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha') f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x_0 = 0$$

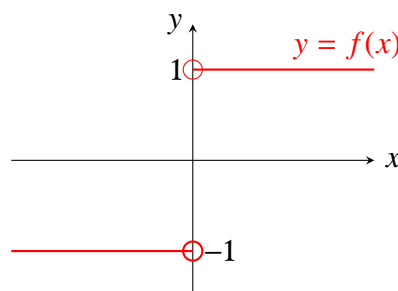
$$\gamma') f(x) = \frac{(2x-5)\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}, \quad x_0 = 3$$

$$\beta') f(x) = \frac{x-1}{x-x^2}, \quad x_0 = 1$$

Λύση

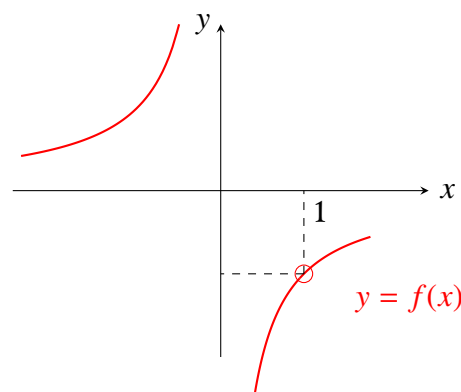
$$\alpha') f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, η f δεν έχει όριο στο σημείο $x_0 = 0$.



$$\beta') f(x) = \frac{x-1}{x(1-x)} = -\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$$

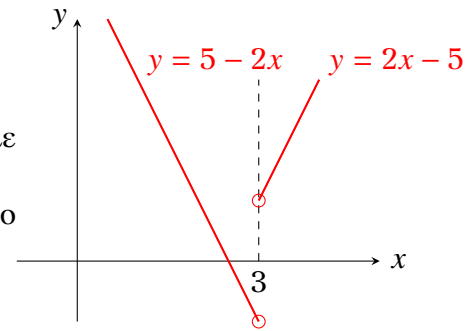
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$



$$\gamma) f(x) = \frac{(2x-5)\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{(2x-5)|x-3|}{x-3}$$

Για $x > 3$ έχουμε $|x-3| = x-3 \Rightarrow f(x) = 2x-5$ Για $x < 3$ έχουμε $|x-3| = -(x-3) \Rightarrow f(x) = -2x+5$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 11$ και $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$, η f δεν έχει όριο στο σημείο $x_0 = 3$.



Ασκήσεις

1. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, εφόσον υπάρχει, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης.

$$\alpha) f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{2-x}, \quad x_0 = 2$$

$$\delta) f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}, \quad x_0 = 2$$

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

$$\varsigma) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$$

$$\zeta) f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ 1 - e^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

2. Να εξετασθεί αν είναι καλά ορισμένα (αν έχουν νόημα) τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -1} \ln x$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^7 - x^5 + 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-4}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -2} \ln(x^2)$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2 + x - 1)$$

3. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο η f έχει όριο στο x_0 , σε κάθε περίπτωση:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda^3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 3\lambda - 2 \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda + \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 2\eta\mu \frac{\lambda\pi}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda^4 + \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 1 - \lambda^3$$

Απαντήσεις

$$1. \quad \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\varsigma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$\delta)$ Δεν υπάρχει

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

2. Καλά ορισμένα είναι τα (α), (δ) και (ε). Στο (στ) το τριώνυμο $x^2 + x - 1$ είναι αρνητικό στο διάστημα

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

και το 0 ανήκει σ' αυτό, άρα δεν ορίζεται.

$$3. \quad \alpha) \lambda^3 = 3\lambda - 2 \iff (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \implies \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2$$

$$\beta') \lambda^4 + \lambda = 1 - \lambda^3 \iff \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda - 1 = 0 \iff (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) = 0 \text{ κι επειδή } \lambda^2 + 1 > 0$$

θα έχουμε $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\gamma') \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2\pi\mu \frac{\lambda\pi}{2} \quad (1)$$

Από την Α' Λυκείου γνωρίζουμε ότι:

- αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$
- αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda + \frac{1}{\lambda} \leq -2$

Η (1) ικανοποιείται μόνο αν το ημίτονο είναι 1, δηλαδή $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.