

Μάθημα 11

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: γ' Λυκείου κατεύθυνσης

Ημερομηνία

18/10/2025

Ιδιότητες του πεπερασμένου ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όριο και διάταξη

1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) > 0$.

2) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) < 0$.

Προσοχή! Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα για το πρόσημο της f .

3) Αν οι f, g έχουν όριο στο x_0 και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) \leq g(x)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

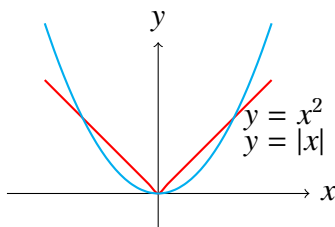
Επίσης, αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε πάλι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Για παράδειγμα, κοντά στο 0 ισχύει $|x| > x^2$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Προσοχή! Σε καμία από τις παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει το αντίστροφο. Για παράδειγμα, κοντά στο 0 ισχύει $x^2 > 0$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.



Όρια και πράξεις

1. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0 , τότε ισχύουν τα εξής:

Ιδιότητες του ορίου

$$\alpha') \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\beta') \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\gamma') \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \text{ σταθερά}$$

$$\delta') \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\varepsilon') \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{όταν } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

$$\zeta') \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$\eta') \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\theta') \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \quad \text{όταν } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Στις περιπτώσεις **α)** και **δ)** μπορεί να έχουμε και περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Προσοχή! Για να εφαρμοστούν οι παραπάνω ιδιότητες, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι οι f και g έχουν όριο στο x_0 .

Επίσης, τονίζουμε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Για παράδειγμα, μπορεί το άθροισμα των f και g να έχει όριο στο x_0 , ενώ καμία απ' αυτές να μην έχει όριο στο x_0 .

Στο παράδειγμα του μαθήματος 11 διαπιστώσαμε ότι η

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

δεν έχει όριο στο 0, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot x}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

2. Για μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

Απόδειξη

Αν $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + a_0 \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

3. Για μια ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ με $Q(x_0) \neq 0$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδειξη

Για τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$.

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0). \quad \square$$

Παραδείγματα

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - x^2 + 5x - 1) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 21.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 5}{x^2 + 4} = \frac{3 \cdot (-2) + 5}{(-2)^2 + 4} = \frac{-1}{8}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} |x^4 - 2x^2 - 3| = |1^4 - 2 \cdot 1^2 - 3| = |-4| = 4.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3} = \sqrt[3]{2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3} = \sqrt[3]{3}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \quad \text{όπου } t = g(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = t_0, \quad \text{και } g(x) \neq t_0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Για παράδειγμα, αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(3x - 1) = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 3$, διότι $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2$ και $3x - 1 \neq 2$ (δηλ. $x \neq 1$) κοντά στο 1.

Προσοχή! Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε αυτό είναι ανεξάρτητο από τη μεταβλητή x , οπότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = \lim_{u \rightarrow x_0} f(u) = \dots$$

Παράδειγμα 1

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (3f(x) - 5x^2 + 4x - 3) = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Λύση. Αν θέσουμε $3f(x) - 5x^2 + 4x - 3 = g(x)$, τότε $f(x) = \frac{1}{3}(g(x) + 5x^2 - 4x + 3)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 4x + 3) = 5 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 4$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 4x + 3) \right) = \frac{1}{3} (2 + 4) = \frac{14}{3}.$$

Παράδειγμα 2

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lambda$, ($\lambda \in \mathbb{R}$), να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Λύση. Μπορούμε να εργαστούμε όπως προηγουμένως, αλλά και ως εξής:

Επειδή $f(x) = \frac{f(x)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ για $x \neq x_0$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Παρατήρηση

Γενικά, ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Πράγματι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Παράδειγμα 3

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \lambda}{f(x) + \lambda} = 0$, όπου $x_0, \lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Λύση. Θέτουμε

$$\frac{f(x) - \lambda}{f(x) + \lambda} = g(x),$$

και λύνουμε ως προς $f(x)$.

Ισχύει

$$f(x) - \lambda = f(x)g(x) + \lambda g(x) \quad \implies \quad f(x)(1 - g(x)) = \lambda(1 + g(x)).$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - g(x)) = 1 - 0 = 1 > 0$, κοντά στο x_0 ισχύει $1 - g(x) > 0$, και

$$f(x) = \frac{\lambda(1 + g(x))}{1 - g(x)}, \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lambda(0 + 1)}{1 - 0} = \lambda.$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \lambda x + 1, & x \leq 1, \\ x^2 - 3\lambda x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

έχει όριο στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - \lambda x + 1) = 1 - \lambda + 1 = 2 - \lambda^3.$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3\lambda x + 3) = 1 - 3\lambda + 3 = 4 - 3\lambda.$$

Σημείωση:

Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους, πχ αν $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < x_0, \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$, τότε για την εύρεση του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπολογίζουμε τα **πλευρικά όρια** της f στο x_0 . Υπολογίζουμε δηλαδή τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Αν τα πλευρικά όρια είναι ίσα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Η f έχει όριο στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

οπότε:

$$2 - \lambda^3 = 4 - 3\lambda \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0. \quad (1)$$

Με το σχήμα του Χορνερ, η (1) γράφεται

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

και έτσι βρίσκουμε

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2.$$

Παράδειγμα 5

Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lambda$.

Λύση. Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Αν θέσουμε $x = -t$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(-t) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \begin{cases} \lambda, & \text{αν } f \text{ είναι άρτια,} \\ -\lambda, & \text{αν } f \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Ασκήσεις

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$, να βρεθεί το όριο στο $x_0 = 1$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) + g(x)$

δ) $f^3(x) - |g(x)|$

β) $\frac{f(x)}{g(x)}$

ε) $\sqrt{f(x)} - \frac{3}{g(x)}$

γ) $3f(x) - 2g(x)$

ς) $f(5x - 4) - g(1 - \sqrt{x^2 - 1})$

2. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2}, & x \in [0, 2], \\ \frac{1}{8}(9x + 4), & x > 2, \end{cases}$$

στα σημεία:

α) $x_1 = 1$, β) $x_2 = 2$, γ) $x_3 = 4$.

3. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

3. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x\sqrt{x} - (x+1)f(x)) = 2$$

$$\beta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

$$\gamma') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 6}{x^3 - 1} = 1$$

$$\delta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = 0$$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (xg(x) - x^2 + 1) = 5$, να βρεθεί το όριο στο $x_0 = 2$ των συναρτήσεων:

$$\alpha') 2f(x) - g(x)$$

$$\beta') \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\gamma') f^3(x) - \sqrt{|g(x)|}$$

5. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (5f(x) + x^2 - 3x + 1) = 3$ και η f είναι περριπτή, να βρεθεί το όριο της

$$g(x) = \frac{3f(x) + 1}{f(x) - 2}$$

στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

6. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σύνολο της μορφής $(\alpha, 1) \cup (1, \beta)$ στο οποίο ισχύει

$$3x^7 - x^4 > 1.$$

Απαντήσεις

$$1. \alpha) 5 \quad \beta) \frac{2}{3} \quad \gamma) 0 \quad \delta) 5 \quad \varepsilon) \sqrt{2} - 1 \quad \sigma\tau) -1$$

$$2. \alpha) \sqrt{8} \quad \beta) 4 \quad \gamma) \frac{25}{4}$$

$$3. \alpha) -1 \quad \beta) 0 \quad \gamma) 2 \quad \delta) 1$$

$$4. \alpha) -4 \quad \beta) 0 \quad \gamma) -2$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{4}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\frac{17}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{1}{2}.$$

6. Αν $f(x) = 3x^7 - x^4 - 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 > 0$, οπότε κοντά στο 1 ισχύει $f(x) > 0$.