

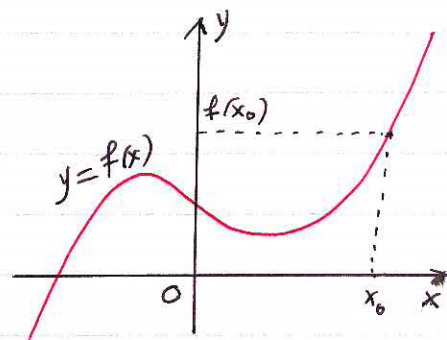
## Μάθημα 23

### Συνεχείς συναρτήσεις σε σημείο

Στο διπλανό σχήμα, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  δε διακόπτεται στο σημείο  $x_0$  και δι' αυτό η  $f$  ονομάζεται **συνεχής στο  $x_0$** .

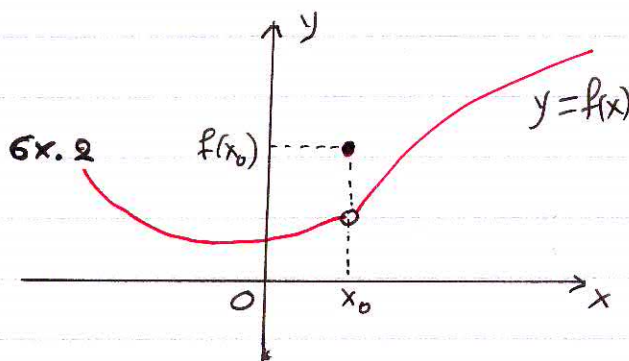
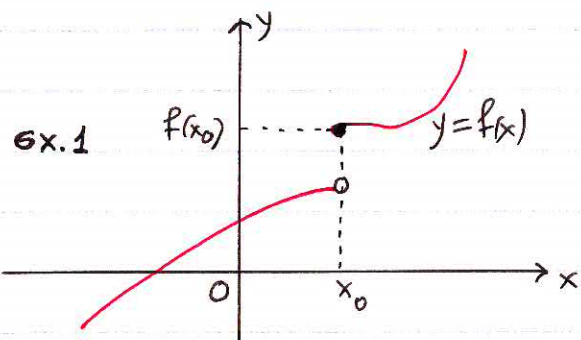
Αυτό συμβαίνει όταν το όριο της  $f$  στο  $x_0$  ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

Έτσι, έχουμε τον εξής ορισμό:



Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **συνεχής στο σημείο  $x_0$**  του πεδίου ορισμού της, όταν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Θεωρούμε, τώρα, τις περιπτώσεις όπου η  $C_f$  διακόπτεται στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.



Στο σχήμα 1, η  $f$  δεν έχει όριο στο  $x_0$ .

Στο σχήμα 2, η  $f$  έχει όριο στο  $x_0$ , αλλά διαφορετικό της τιμής  $f(x_0)$ .

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές, η  $f$  ονομάζεται **ασυνεχής στο  $x_0$** .

Έχουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό:

Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέμε ότι είναι **ασυνεχής στο σημείο  $x_0$**  του πεδίου ορισμού της, όταν δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , δηλαδή ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  ή η  $f$  δεν έχει όριο στο  $x_0$ .

**Προσοχή!** Οι έννοιες "συνεχής στο  $x_0$ " και "ασυνεχής στο  $x_0$ " έχουν νόημα μόνο όταν το  $x_0$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

### Παράδειγμα 1

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ .

#### Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+e^{1/x}) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0 \text{ και επομένως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \cdot \frac{1}{1+e^{1/x}} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Άρα, πράγματι ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

### Παράδειγμα 2

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $x^2 f(x) = 1 - \sin x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο 0, να βρεθεί η τιμή  $f(0)$ .

#### Λύση

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{x^2} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{x^2(1 + \sin x)} = \frac{1 - \sin^2 x}{x^2(1 + \sin x)} = \left( \frac{\cos x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x}.$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο 0, ισχύει

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\cos x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin 0} = \frac{1}{2}.$$

### Παράδειγμα 3

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^3(x) + f(x) = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

#### Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

- Για  $x=0$  η ισότητα  $f^3(x) + f(x) = x^2$  δίνει  
 $f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot (f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ , διότι  $f^2(0) + 1 > 0$ .

- Επίσης, έχουμε  $f(x) \cdot (f^2(x) + 1) = x^2$ , δηλαδή  $f(x) = \frac{x^2}{f^2(x) + 1}$

Επειδή  $x^2 \geq 0$  και  $f^2(x) + 1 \geq 1$ , ισχύει  $0 \leq f(x) \leq x^2$  και με το κριτήριο παρεμβολής διαπιστώνουμε αμέσως ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ .

### Παράδειγμα 4

Μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta = (a, b)$  και η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  $x_0 \in \Delta$ , έχει πεπερασμένα πλευρικά όρια στο σημείο  $x_0$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

#### Λύση

Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lambda$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \mu$ , όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

- Επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = \lambda \cdot 0 = 0$ ,

ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

- Ομοίως  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) - f(x_0)) = \mu \cdot 0 = 0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

Έτσι, έχουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  και άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

### • Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1| + |x-1|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \epsilon) f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \sigma\zeta) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2+3^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

2. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  και το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2 + 3}{x - 1}$  είναι πεπερασμένο, να βρεθεί η τιμή  $f(1)$ .

3. Να βρεθούν οι  $a, b \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + a}{x - 1}, & x < 1 \\ bx + 2a - 1, & x \geq 1 \end{cases}$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

4. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $|f(x)| \leq |x - x_0|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

5. Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο 0 και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|xf(x)| \leq 1 - \cos x$ . Να βρεθεί η τιμή  $f(0)$ .

6. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

7. Για δύο συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f^2(x) + |g(x)| = x^2 - 2x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο σημείο  $x_0 = 1$ .

8. Μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|f(x+1)| \leq x^2$ .

Να αποδειχθεί ότι:

α) Η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 1$ .

β) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ .

γ) Ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - f^2(1)}{h} = 0$ .

## ● Απαντήσεις

1. α) Είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .  
 β) Δεν είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ .  
 γ) Είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$ .  
 δ) Είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ .  
 ε) Δεν είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$ .  
 στ) Είναι συνεχής στο 0, διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ .
2.  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ .
3. Το  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  είναι πεπερασμένο όταν  $a = -2$ , οπότε ισούται με 3.  
 Τελικά,  $a = -2$  και  $b = 8$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$  (με το κριτήριο παρεμβολής).
5.  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , διότι  $-\left| \frac{1 - \sin x}{x} \right| \leq f(x) \leq \left| \frac{1 - \sin x}{x} \right|$  κ.λ.η.
6.  $|f(x)| = \frac{|x|}{f^2(x) + 1} \leq |x|$  κ.λ.η.
7. • Για  $x=1$  βρίσκουμε  $f(1)=0$  και  $g(1)=0$   
 •  $\lim_{x \rightarrow 1} (f^2(x) + |g(x)|) = 0$  κ.λ.η. (εξέλε παραδείγματα 3, σελίδα 91).
8. α)  $|f(x)| \leq (x-1)^2$  και εφαρμόστε το κριτήριο παρεμβολής, οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$ .  
 β)  $|f(x)| \leq |x-1|^2 \Leftrightarrow -|x-1| \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq |x-1|$  κ.λ.η.  
 γ) Θέτουμε  $1+h=x$  και το όριο γράφεται  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)}{x-1} \cdot f(x) \right) = 0 \cdot f(1) = 0$ .  
 ( $f(1)=0$ )