Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά προσανατολισμού
Β΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις

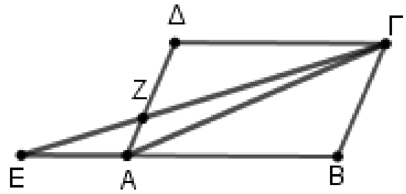
2024-2025

Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

21165. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$.

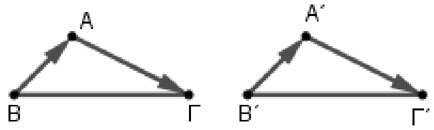


α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

22055. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.



α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς ΒΑ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και

(ii) το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

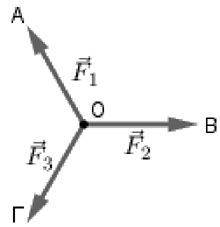
ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$.

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 4ο

22068. Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120°, έτσι ώστε το υλικό σημείο Ο να ισορροπεί.



α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ και $\vec{F_3}$ είναι αντίθετα.

γ) Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ και $\vec{F_1} + \vec{F_2}$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο Ο), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta = 60^\circ$. **ii.** $O\hat{\Delta}B = 60^\circ$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}|$.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

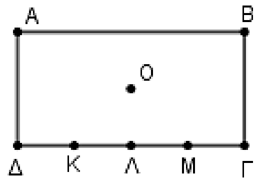
15010. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}}$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}} = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} + \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$.

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ είναι αντίθετα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α Δ, και Ε είναι συνευθειακά.

22042. Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα. Αν $\overrightarrow{\Delta\mathrm{K}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ **β)** $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ **γ)** $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}$

Θέμα 4ο

21885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \kappa \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) i. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma} // \overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}\right| = \kappa\left|\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}\right|$.

ii. Αν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ αι να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

Συντεταγμένες διανύσματος
Θέμα 2ο

14666.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

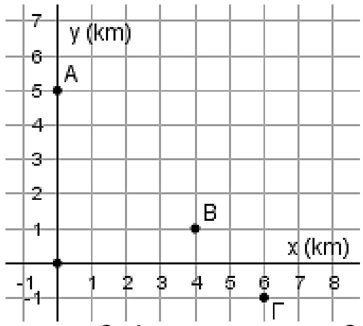
15002.Δίνονται τα σημεία $A(0,5),\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

β) i.Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος

ii.Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

15043. Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού Β από τον οικισμό Α είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού Β από τον οικισμό Γ.

15854.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,\ -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

16147.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma}=-3\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Οx.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

16151.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=\left(-\sqrt{3},1\right)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

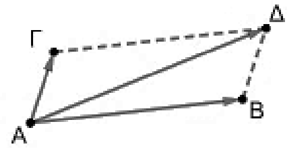
16579.Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = \left(-8, -12\right)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

16580.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(11, 5), Γ(3, 7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

γ) του σημείου Δ.

16581.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(−1, 6), Β(1, 2) και Γ(3, −2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

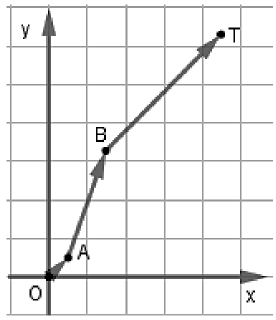
17070.Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A\left(3,4\right)$, $B\left(2,1\right)$, $\Gamma\left(3,-1\right)$ και $\Delta\left(4,2\right)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και Α, Β, Γ και Δ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

18878.Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο Ο) τρείς μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο Α, στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο Β και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο Τ. Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα
$\overrightarrow{OA} = \left(1,1\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(2,4\right)$, $\overrightarrow{BT} = \left(2, 5\sqrt{3}-5\right)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = \left(5, 5\sqrt{3}\right)$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση $\left(OT\right)$ του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

19038.Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(2,3\right)$, $\vec{\beta} = \left(-1,1\right)$ και $\vec{\gamma} = \left(-5,-5\right)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\gamma}\right| = 5\left|\vec{\beta}\right|$.

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

21681. Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2), B(-3, 4), \Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου.

22038.Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(5,-12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

22044.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ.

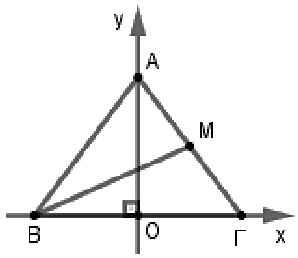
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22060.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$.

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ;

22557.Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ.
Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Οy και οι κορυφές Β και Γ είναι σημεία του άξονα x΄x, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Έστω $(\mathrm{B}\Gamma)=12$, $(\mathrm{AO})=8$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{A}(0,8)$, $\mathrm{B}(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii. Μ(3,4).

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ.

Θέμα 4ο

17076.Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-3,-1)$, $\mathrm{B}(0,3)$ και $\mathrm{M}(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|\geq 5$.

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17077.Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\vec{i}+\lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β ως συνάρτηση του λ.
γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με 5;
δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων Α και Β να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$.

14953. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(− 2,5),Β(7, 8), Γ(1, − 4).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $BA\Gamma$.

15038. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}|=3,\ |\vec{\beta}|=4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)=15$.

15073. Δίνονται τα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

15186. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), Δ(1, −2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0).

β) $\overrightarrow{MN}=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(8,4)$.

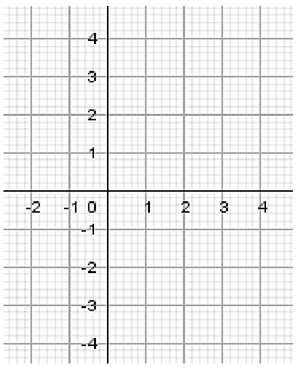
γ) $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

15252. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



15317. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

β) i. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

15379.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

15658.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο Κ(2,1) .

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) Αν το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, Β είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι Α(4,- 1) και Β(3, 2).

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma+y_\Gamma=11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και $\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

15825.Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$.

γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$.

15852.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

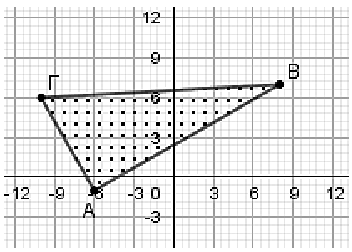
Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}$.

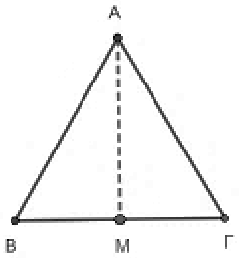
15996.Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

16141. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



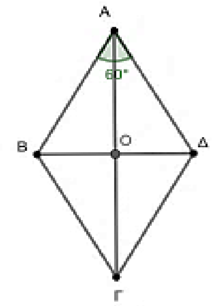
α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right)$ **ii.** $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right)$ **iii.** $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}}\right)$

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}}\right)$ **v.** $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}},\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}\right)$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ **ii.** $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$ **iii.** $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$



16144.Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$.
Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ **β)** $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$

γ) $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ **δ)** $\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ **ε)** $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$

16426.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(x,y)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$.

16427. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

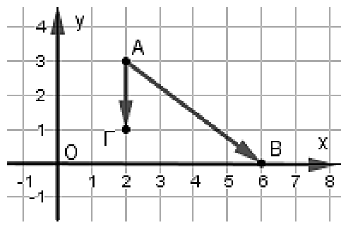
β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ με τον άξονα x΄x.

16428.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$ και $\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{3}{8}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

17075.Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ του καρτεσιανού επιπέδου .



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-3)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(0,-2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

20685.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1)$, $\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία Α(−1,2), Β(β, 0), Γ(0, γ).

Τα διανύσματα $\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και να αποδείξετε ότι β = 1.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\frac{9}{5}$.

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

20732. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}|=4|\vec{\alpha}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$.

20733. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ $,\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

20773.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{u}=(4,-1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v}=(1,\kappa)$.

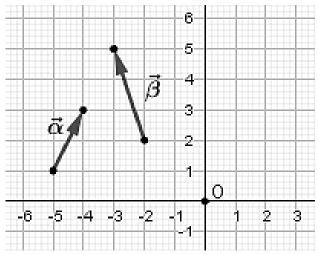
γ) Για $\kappa=4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

20888.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=4,\ |\vec{\beta}|=5,\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

20914.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.



α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

21682.Έστω $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,\ 2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,\ -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,\ -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

22040.Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

22170. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3),\vec{\beta}=\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}=\left(x^2,x-1\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u}=(3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

22554. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x΄x, y΄y τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

ii. $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

4ο Θέμα

15042.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά.
β) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ.
γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.
Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.
ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

15320.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.
α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2$. **ii.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \left|\vec{\beta}\right|^2$.

β) Αν $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

18520.α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

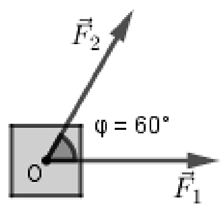
$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right|^2 + 2\left|\vec{\beta}\right|^2 \quad (1)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$.
Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



18547.Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. **ii.** Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

20938.Θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΒ, με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=(6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}=\left(|\vec{\alpha}|-4,\ |\vec{\alpha}|-2\right)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$.

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΟΑΓΒ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά ΟΑ με τη διαγώνιο ΑΒ του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ.

22063.α) Έστω $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

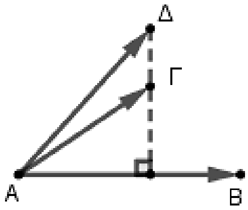
i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$. **ii)** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$. **iii)** $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$.

22064.α) Αν $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A\Gamma},\ \overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$:



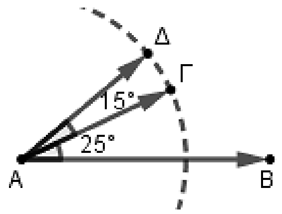
i) είναι αριθμοί ή διανύσματα;

ii) μπορούν να συγκριθούν;

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **ii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **iii)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

γ) Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:



i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3ο Θέμα

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\alpha-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$.

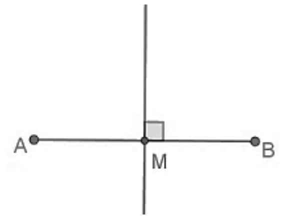
γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|,|\vec{\delta}|$.

δ) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}}\right)$.

Η Ευθεία στο επίπεδο

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα



15027.Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.

15044.Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.
α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

15271.Δίνονται τα σημεία Α(- 3, 2), Β(1, 6) και Γ(- 13,- 7) .
α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση
$y = x + 5$.
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

15986.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3).
α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει στην ευθεία (ε).

16002.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2) . Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1) .
β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

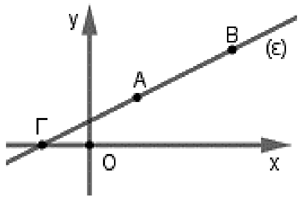
18236.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1) . Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0).
β) Να βρείτε:
i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ
ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

18351.Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:
α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.
β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

21662.Δίνεται η ευθεία ε: $-x + y - 2 = 0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).
α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

β) Να βρείτε:
i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε.
ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄.
iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε.

20868.Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $\text{A}(1,1)$, $\text{B}(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).

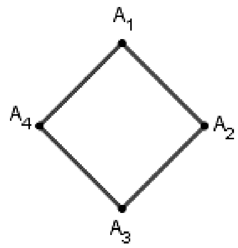


α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε).
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

21162.Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6) . Να βρεθούν:
α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

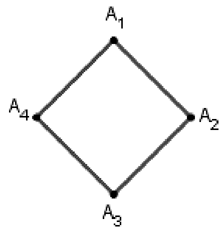
21964.Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση:
$x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:
α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).
β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y=-x+2$.
γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1).

22047.Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;
β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_2}{\lambda_4}=2$.

22049.Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 αντίστοιχα.

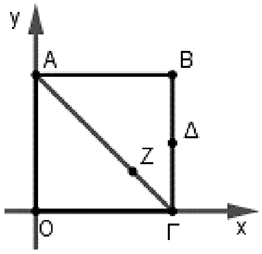


α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;
β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_2\cdot\lambda_3+\lambda_3\cdot\lambda_4+\lambda_4\cdot\lambda_1=-4$.

22071.Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1).
ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ.

22092.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.
α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες Δ(−1,1).
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

22173.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{ΑΓ}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.



α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ.

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

4ο Θέμα

14970.Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x-2)+\lambda-2,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών. Έστω $M(1,\ -2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ.

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

14978.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .

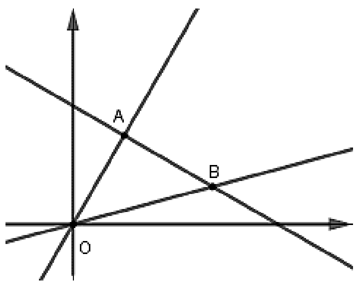
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

15029.Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $εφ15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

15275. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

16003.Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ.
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ.
γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
i. Να αποδείξετε ότι 0 < α < 4 .
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ) .

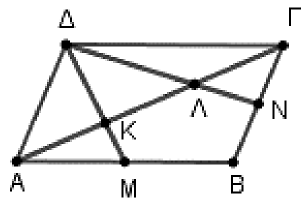
17078.Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.
ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

18568.Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.
β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:
i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε.
ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

22065.Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ενώ Κ και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔΜ και ΔΝ την διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν.
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΑΓ, ΔΜ, ΔΝ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ.
δ) Να δείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

3ο Θέμα

15178. Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}$ (1).

α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

16766.Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

22059.Δίνεται το σημείο $A(1,-3)$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x + 6y = 1$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

22072.Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

22171. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2).

β) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1).

4ο Θέμα

15004.α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

β) Αν $\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\varphi} = 45^o$.

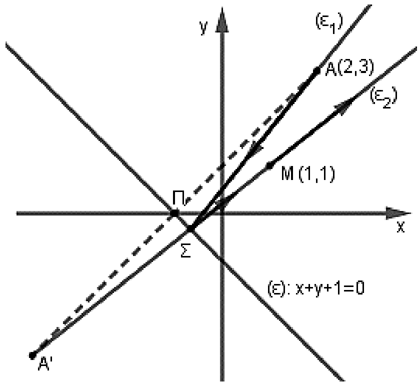
γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 .

15253.Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε .
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :
i. είναι παράλληλες στον $x'x$.
ii. είναι παράλληλες στον $y'y$.
iii. διέρχονται από το (0,0) .
γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

15439. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

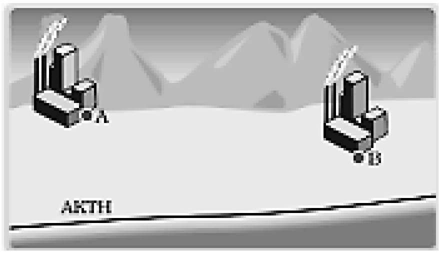
ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4.-3)$.

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄, Σ, Μ, , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε).

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1).

15475. Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

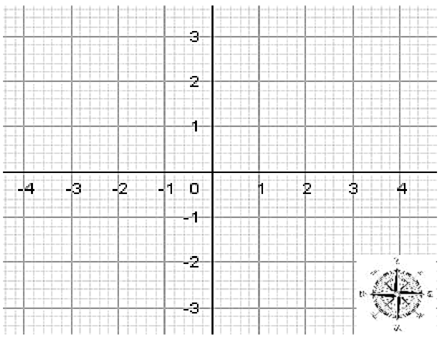


α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

16477. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας ε_λ: $\lambda x+(1-\lambda)y+2=0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο Ο(0,0) .



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο Ρ βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το Ρ έχει εξίσωση $x+y+4=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

18244. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y=x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x΄x.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15°.

δ) Να αποδείξετε ότι $συν15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

21160. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία O(0, 0), B(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.
β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο.
γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

21652. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

i. να βρείτε συναρτήσει του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ε_λ και η_λ.

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το M κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$.

Εμβαδόν τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία

2ο Θέμα

15440. Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

16194. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) : $8x + y - 28 = 0$, (ε_2) : $x - y + 1 = 0$, (ε_3) : $3x+4y+5=0$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2).
β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:
i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3).

16425. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

16759. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3).

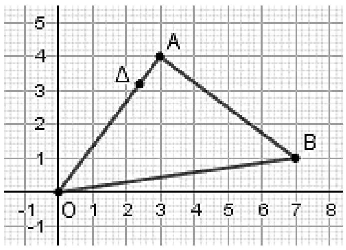
16769. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:
i. Τις συντεταγμένες του Μ.
ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

16771.Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.
α) Να βρεθεί το σημείο Β.
β) Αν Β(5,0):
i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

16774.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).
α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α.
γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x.

16810.Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία
Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).
α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α).

17805.Δίνεται το τρίγωνο ΑΟΒ με Α(3, 4), Β(7,1), Ο η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς ΑΟ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.
γ) Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$.

18240.Δίνεται το σημείο Α(1, 2) και η ευθεία (ε): y =x + 3.
α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) .
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε) .
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) ,(ε) .

18733.Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.
γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$.

18979.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.
α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της ευθείας ε_1.
γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_2.

20885.Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x και y΄y, είναι: Ε = 8.

20864.Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1.

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

20926.Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 2y = 1$ και τα σημεία Α(0,2), Β(1,0) .
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε.

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του Α από το Β και να αποδείξετε ότι η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β.

21260.Δίνεται η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$.

4ο Θέμα

14984.Θεωρούμε τα σημεία Α(− 2,− 3) και Β(7, 9). Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε (ΑΜΒ) = 12 τ.μ.
α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών
$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).
γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.

15194.Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,1), Β(4,4) και Γ(3,1).
α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε (ΚΑ) = (ΚΒ) .
Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ ;

15273.Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(- 2,2) και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1,\ 3\alpha + 1),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι

παράλληλη στην ΒΓ.
δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ) . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

15380.Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: $3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.
β) Για α = 4
i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y.
ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

15433.Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία Α(−1,−2) και Β(3,1). Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x + y - 1 = 0$.
α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:
i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

15681.Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Μ είναι το μέσο της βάσης του ΟΑ.
β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΑΒ είναι
ΟΒ : $2\beta x - \alpha y = 0$ και ΑΒ: $2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα.
γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΟΒ και d_2 η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.
δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

15692.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$.
ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.
Έστω $\varepsilon_1 : x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.
β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha,\ \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.
γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

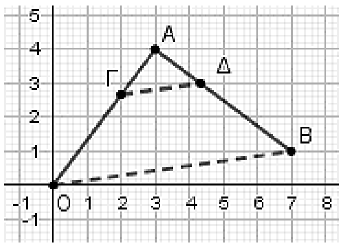
15987.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): y=2 x−1.
β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).
γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

16057.Δίνονται τα σημεία Α(2,0), Β(3,4) και $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ.
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση (ε): $15x-8y-30=0$.
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β .
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).
(

17694.Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).
α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που
ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

17695.Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2.
δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6.

18732.Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:
i. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
ii. $\Gamma\Delta // OB$.
iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$.
β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $\left(A\Gamma\Delta\right) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \left(ABO\right)$.

20861.Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο Μ.
β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E=8$.

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή Ο.

20655.Δίνονται τα σημεία $A(2,1), B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

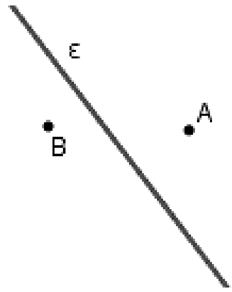
β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 4y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 4y + 11 = 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ».

20724.Η ευθεία ε με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π.



Να βρείτε :

α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β.

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B.

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

20728.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx'.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

20939.Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής: $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0$, με $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

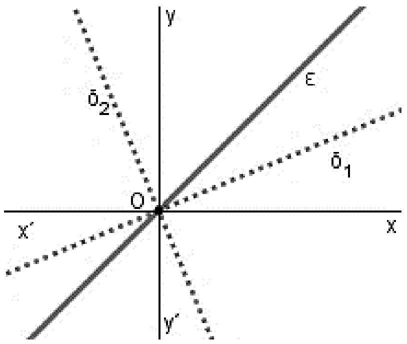
α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π.

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.
δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό Ο, υπάρχουν δύο επιλογές:
$1^η$ επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό Ο με την πηγή
$2^η$ επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό Ο με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.
Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,
i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.

ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

22067.Θεωρούμε μία ευθεία $ε:\ y=λx$ με θετική κλίση λ.



α) Αν $δ_1$ είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x΄x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου $δ_1$ είναι: $y=λ_1x$ με $λ_1=\dfrac{λ}{1+\sqrt{1+λ^2}}$.
β) Αν $δ_2$ είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x΄x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου $δ_2$ είναι: $y=λ_2x$ με $λ_2=\dfrac{λ}{1-\sqrt{1+λ^2}}$.
γ) Αν $λ=1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $εφ22,5^ο=\sqrt{2}-1$.

22073.Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $λ\in\mathbb{R}$.
α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.
ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.
β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;
ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

22262.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.
δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(ΜΑΒ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

(

22265.Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $μ\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.
β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό.
δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1.

22266.Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x-8y+3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$,διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ).

3ο Θέμα

15152.Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: 3x + y + α = 0 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

γ) Για α = 4 να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y.

Κωνικές τομές

Κύκλος

2ο Θέμα

15028.Έστω κύκλος C με κέντρο Κ(1,2) και ακτίνα ρ=2 και ευθεία (ε) με εξίσωση

$$3x+4y-1=0.$$

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.
β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου Κ(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

15680.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο Κ(1, 2) και η ευθεία

$$\varepsilon:\ 3x+4y+1=0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$.
β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

15994.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Ο(0,0) και διέρχεται από το σημείο Α(1,2).
β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.
i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο Α.
ii. Να βρεθεί το σημείο Β, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του Α σε αυτόν τον κύκλο.

16808.Τα σημεία Α(-8, 1), Β(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.
α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου.
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

17317.Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.
α) Να βρείτε το κέντρο Κ του κύκλου C και την ακτίνα του.
β) Αν Κ(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$.
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

18238.Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(- 3,5) .
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος ΑΒ.
β) Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

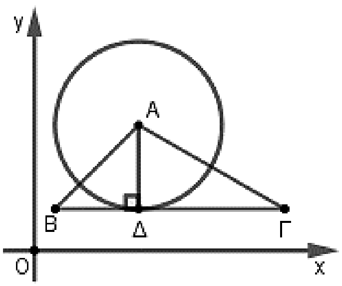
18239.Δίνεται το σημείο Κ(- 3,1) και η ευθεία (ε) : $4x-3y+5=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

18241.Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων
α) τον κύκλο C .
β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον y΄y και να γράψετε τις εξισώσεις τους.
γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx ΄ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

18700.Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)
β) Δίνεται το σημείο A(3, −4).
i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A.

18749.Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του ΑΔ, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΔ.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο Α, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ.



18968.Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2-6x-8y=0$:(1).
α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho=5$.
β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon:3x+4y=0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.
γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

19039.Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2.
β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με −1.
ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

20890.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,-3), Β(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:
α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

21962.Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.
β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

21965.Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)
α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.
β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ε): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε).
δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

22056.Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy.
β) Υπάρχει σημείο Α στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου Ο η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22147.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0 \ (1)$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα R = 2.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R).
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο Α.

22172.Θεωρούμε την ευθεία ε: 3x – 4y = 0 και το σημείο Α(-2,1).
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2.
β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

22279.Δίνεται η εξίσωση $(y-1)^2 = (3+x)(1-x) \ (1)$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2.
β) Η αρχή Ο(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).
γ) Η ευθεία (ε): x + y = 2 είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

4ο Θέμα

14954.Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.
β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

15030.Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία ε: $2x + y + 5 = 0$.
α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .
β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες (η_1),(η_2) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών (η_1),(η_2).

15080.Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-2x-8=0$ (1) και $C_2: x^2+y^2-6x+8=0$ (2).
α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα Κ(1,0), Λ(3,0) και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 =1$ αντίστοιχα.
β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ).
ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

15081.Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0$ και $C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0$.
α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K\left(-\sqrt{2},0\right),\Lambda\left(3\sqrt{2},0\right)$ και ακτίνες $\rho_1=1,\ \rho_2=3$ αντίστοιχα.
β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .
ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

15082.Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:
$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=8$ και $C_2:(x-7)^2+(y+2)^2=18$.
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2, αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ .
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

15177.Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$.
β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.
γ) i.Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2.

15189.Δίνονται τα σημεία Α(−2,0) και Β(2, −2).
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση C: $x^2+(y+1)^2=5$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1 : x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y + 7 = 0$.
δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C.

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.
α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(3, 2) βρίσκεται έξω από τον κύκλο.
γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ.

15432.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$ (1) με $\kappa \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.
δ) Για κ = 1 να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο Γ(2,2).

15628.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.
α) Να αποδείξετε ότι η (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε k > 0.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε k > 0.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε k > 0.

15646.Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ και $C_1 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$.
α) Να δείξετε ότι τα κέντρα ΚΛ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2 .
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ..

15993.Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
γ) Αν Α(1,0) και Β(3,0) είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.
δ) Αν ένα σημείο Μ(α, β) επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

15791. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου Α και την ευθεία (ε) : $x = 5$.

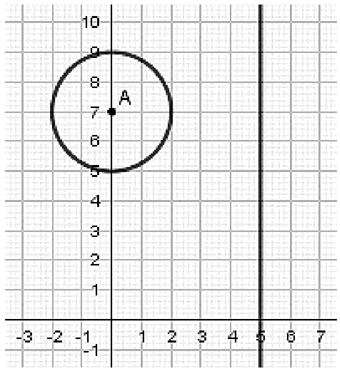
α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 .

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2 .

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ΑΒ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου Β.

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2 , που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε).



16191. Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x, ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$,να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0 \ (1)$.

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λx + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1).

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45°;

15826. Δίνεται η εξίσωση

$x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0 \ (1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ.

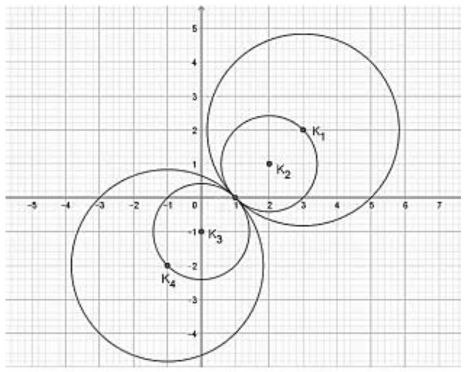
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ.

Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.



iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

18237. Θεωρούμε τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 2), Γ(1, 4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία ε: $y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

18247. Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(α,0) και Β(0,β) όπου α, β > 0.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

ii. την απόσταση (ΟΜ) .

β) Αν $(\text{ΟΜ})=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(\text{ΟΜ})=\dfrac{(\text{ΑΒ})}{2}$.

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ.

18415.Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1\ (1)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία ε: $2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

18416.Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)\ (1)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) Δίνονται τα σημεία $\text{Α}(4,4)$ και $\text{Β}(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ.

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

18467.Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2+(y+2)^2=2(x+3)$: (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $\text{Κ}(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=3$.

β) Να δείξετε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία Α και Β ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y=x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΑΒ.

18521.Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(2,4) και Γ(3,1).

α) Να αποδείξετε ότι η $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma=90°$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

18567.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και το σημείο $\text{Α}\left(2\sqrt{2},0\right)$.

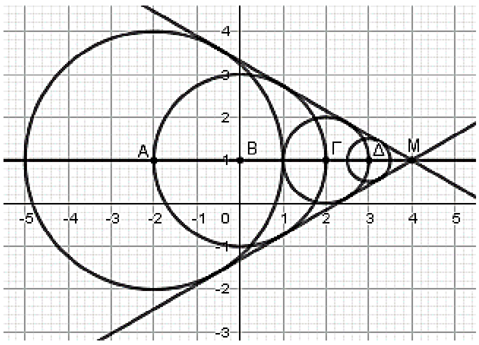
α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C.

ii. Να βρείτε τις εξισώνεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.
β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

18569.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.
α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0).
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150°.
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$.
γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β.

18570.Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία
(ε): $3x-4y=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β
i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$.
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.
iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ.

18745.Επιστήμονες προκειμένου να μελετήσουν υδρόβιο έντομο κατέγραψαν στιγμιότυπα από τους ομόκεντρους κύκλους με κέντρα τα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ και ακτίνες $3,2,1,\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, που σχηματίζονται σε κάθε προσγείωση του στο νερό. Η εικόνα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έντομο κινούμενο ευθύγραμμα περνάει από τα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ για να καταγραφεί την στιγμή που καταλήγει στο σημείο $Μ$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου.
β) i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης.
γ) Με βάση το μοτίβο που ακολουθούν οι κινήσεις του εντόμου να βρείτε ότι η τελική θέση του εντόμου είναι το σημείο $Μ(4,1)$.

Δίνεται ότι $εφ150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18781. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-6x+5=0$ και $C_2: x^2+y^2=1$.

α) Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x-3)^2+y^2=4$.

ii. Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να βρείτε:

i. Το σημείο επαφής των δύο κύκλων C_1 και C_2.

ii. Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων C_1 και C_2.

γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά.

18871.Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) i.Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο Α έχουν εξισώσεις (ε_1): $2x-y=5$ και (ε_2): $x+2y=5$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, όπου Β και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον κύκλο.

20091.Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ.

β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y=-12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ.

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

20229.Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ= 0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

20650.α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x+2$, $\varepsilon_2: y=x-2$ και τα σημεία $A(-2,0)$, $B(2,0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB.

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

β) Ο κύκλος (K,ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2. Αν το κέντρο K του κύκλου (K,ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K, συναρτήσει του λ.
ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K,ρ), για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

20651.Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.
α) Να βρείτε όλα τα σημεία Μ στον άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.
β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο ΑΒ.
γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία Μ που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

20700.Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν Ο η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:
α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x-2)^2+(y-2)^2=8$.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C.
γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

20863.Δίνονται τα σημεία Α(1,0) και Β(3,0).
α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
β) Αν Κείναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ),να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο Κ και διέρχονται από τα σημεία Α και Β συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.(
γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1, \ \lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:
i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία $(\varepsilon): x+\lambda y-1=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο Α(1,0).

(

21154. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.
β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α.
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x.

21159.Δίνονται τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) με α, β > 0 και α + β =10 .
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2+y^2-\alpha x-(10-\alpha)y=0$.
β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή Ο των αξόνων και ένα σημείο Ρ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ για τις διάφορες τιμές των α και β.

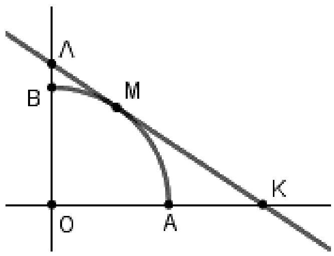
21276. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α $(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ $(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2.
β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.
γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1.

21349. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2+y^2-9x-3y+10=0$ (1) και $4x+3y-10=0$ (2) αντίστοιχα.
α) i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C).
ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.
iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C).
β) Αν είναι Α(1,2) και Β(4, −2), τότε:
i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο.

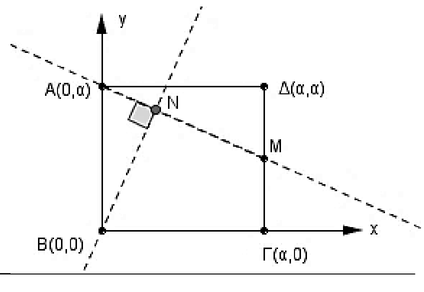
21683. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2+y^2=4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1,\ y_1)$, $0<x_1<2$ ανάμεσα στα Α, Β.



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο Μ και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της Κ, Λ με τους άξονες.
β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος ΚΛ είναι $d=\dfrac{8}{x_1y_1}$.
γ) Να βρείτε το μήκος d_o του τμήματος ΚΛ όταν $x_1=\sqrt{2}$.
δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το Μ κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d \ge d_o$.

21696. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x-2y+3=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.
β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C.
γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.
δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

22061. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α ($\alpha>0$) και κορυφές $A(0,\alpha)$, $B(0,0)$, $\Gamma(\alpha,0)$ και $\Delta(\alpha,\alpha)$. Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και το τμήμα ΒΝ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. ΑΜ **ii.** ΒΝ

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν.

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

22062. Δίνεται η οικογένεια κύκλων

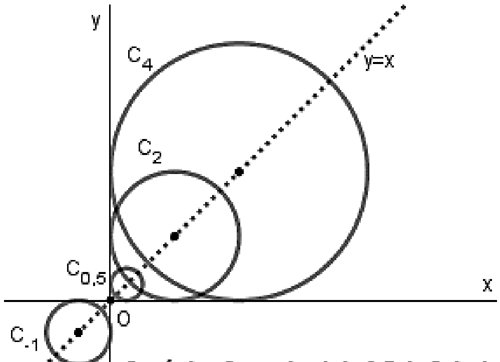
$C_\lambda : (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ, $\lambda \neq 0$.

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda \neq 0$.

Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$.

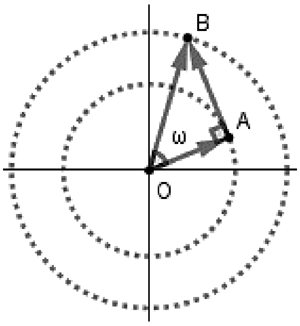


Οι κύκλοι C_λ για λ=-1, λ=0,5, λ=2, λ=4

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = \alpha$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

ε) Έστω $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ.

22066. Θεωρούμε το σημείο $A = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και το σημείο $B = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

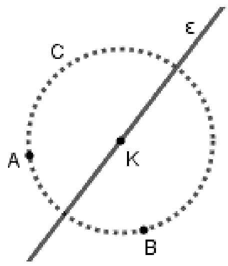


α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

22069. Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6, 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο Κ του οποίου διέρχεται η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 7$. Να βρείτε:



α) τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του κύκλου C.

β) την ακτίνα R του κύκλου C.

γ) την εξίσωση του κύκλου C.

22214. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y), A(-1,0), B(1,0) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$.

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

ii. Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$.

22223. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ.

ii. Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

22239.Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy η εξίσωση $3x+4y=25$περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα 2.

α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;

β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x+y+\lambda-2=0$, με $\lambda\neq 0$.Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

22264.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+\lambda y+\lambda-1=0\ (1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$.

γ) Για λ = 1, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

22280.Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο(0,0) θεωρούμε τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2+y^2-6x-8y+21=0\ (1)$ και $x^2+y^2+2x-2y+1=0\ (2)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ) Έστω Μ, Ν τυχαία σημεία των κύκλων (Κ, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων Μ και Ν.

22508.Οι κορυφές Α και Γ, ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία (1,4) και (3,0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα γράφεται στη μορφή $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου.

33696. Το κέντρο ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): y=2x – 1. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho = 3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): x + y -2 = 0 εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $\left(x-3\right)^2 + \left(y-5\right)^2 = 18$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x - y + 2 = 0$.

ii. Είναι Α(0,2).

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c).

Παραβολή
2ο Θέμα

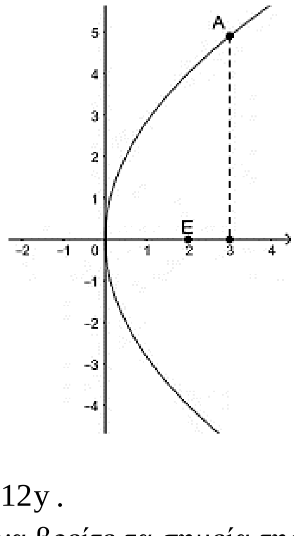
18242.Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4).
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

18701. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).
α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο Α(2,2).
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

20235.Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.
α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8},1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0.

21248.Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1 : x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.
α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y .
ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y.
β) Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

21306.Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή Ο(0,0) και εστία Ε(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Οxy.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$.
β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο Α.

21307.Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.
α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε (0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.
β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(- 6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.
γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2).

22190.Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x\ (1)$.

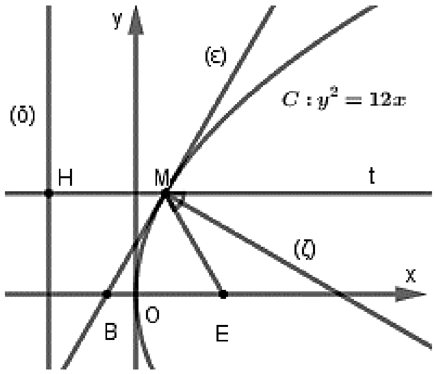
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1).

22267. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x\ (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ………………….. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση …………..».
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2).
γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x’x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

4ο Θέμα

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1, 2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Μt παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



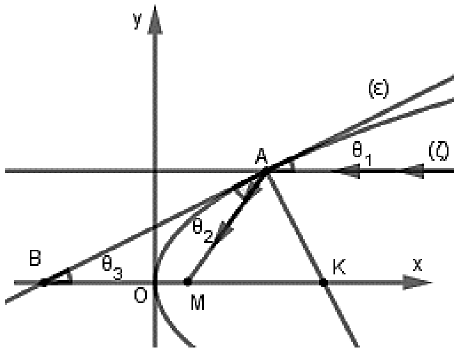
α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος.
δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$.

18245.Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0\ (1), \lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.
β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.
γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ.
δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ, να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E.

18372.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.
α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ.
γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο.

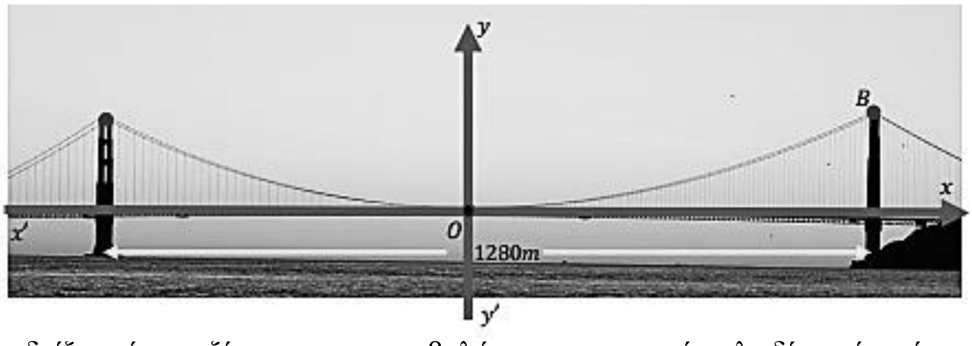
18741.Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = \alpha \cdot x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16, \alpha+4)$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.
β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της παραβολής C η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2 : -x + 2y + 4 = 0$.
δ) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C_1 με κέντρο την κορυφή της παραβολής C ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ε_1 του ερωτήματος γ).

18870.Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο Α(4,4) και η ΑΚ κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο Α και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο Μ.
Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα ΑΜ με την (ε) είναι ίσες, τότε:



α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο Β στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x.
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές.
δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

19047.Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1280m, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160m. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ΄αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.
γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $B(640, 160)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $E\Delta = EB$.

20090.Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, ένα σημείο της.
α) Αν Α είναι η προβολή του Μ στη διευθετούσα της παραβολής,
i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Α συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του

σημείου Μ.

ii. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο $(\text{ΜΑΕ}) = \frac{5}{8}$ τ.μ.

β) Αν $\text{Μ}\left(\frac{1}{4},1\right)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι ρόμβος, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής και Μ΄ το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x.

20092.Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $\text{Μ}\left(\frac{1}{4},1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

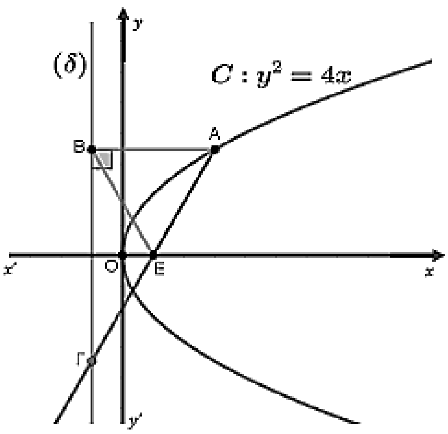
α) i. Να δείξετε ότι h ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ε.

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με η παράλληλή στην ε.

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε;

20684.Ένα σημείο $\text{Α}(x_\text{Α},\, y_\text{Α})$ της παραβολής $C:\ y^2 = 4x$ με $x_\text{Α} > 0,\ \ y_\text{Α} > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία ΑΕ τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ, έτσι όμως ώστε η εστία Ε της παραβολής C, να είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Επίσης, από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω Β το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β) Να αποδείξετε ότι $x_\text{Α} = 3$ και $y_\text{Α} = 2\sqrt{3}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

20862.Δίνονται τα σημεία $\text{Μ}(-2,2)$, $\text{Ε}\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

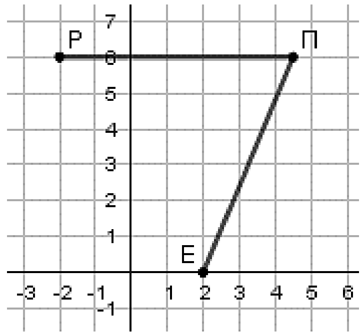
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο Μ και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x΄x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο Ε και την ευθεία (ζ).

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της καμπύλης $C:\ x^2 + 2y = 0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1), με εξίσωση $y = x + 4$.

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών (ε_1) και (η). Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

21653.Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa,\lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο E(2,0) και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2,\lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi E)=(\Pi P)$.



α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2,\lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi P \perp (\delta)$.
γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa,\lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
δ) Αν $y^2=8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π.

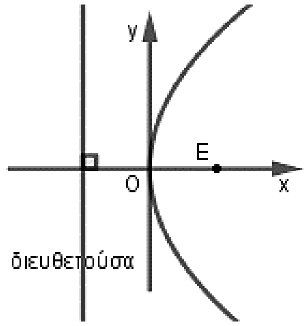
21690.Δίνεται η παραβολή $C: y^2=3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+10=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.
β) Έστω $M(x_o,\ y_o)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M,\ \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M,\ \varepsilon)=\dfrac{(y_o+2)^2+6}{5}$.
γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.
δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

21883.Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $y=x-2$.
α) Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ της παραβολής.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων 0xy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε.
γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής , τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Μ από την ευθεία ε είναι $d(M,\varepsilon)=\dfrac{\frac{1}{4}x^2-x+2}{\sqrt{2}}$.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία.

22465.Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον x΄x. Η απόσταση της εστίας Ε από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η Ε(2,0), η διευθετούσα της είναι η δ : x= -2 και η εξίσωσή της παραβολής είναι y^2=8x.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της Α(2,4) είναι η ε: $y=x+2$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της Α(2,4).

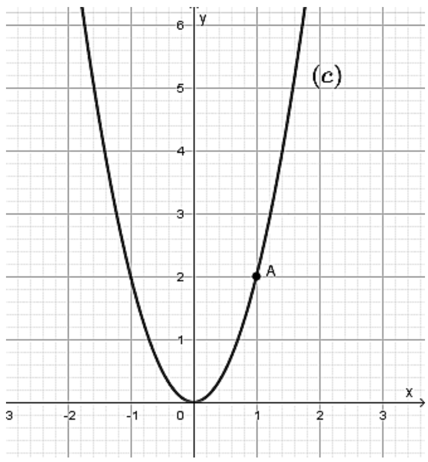
22275.Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).
α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

1ο Θέμα

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x = x_0$.
iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα η $\vec{\eta} = (A, B)$.
iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο Ε(1,0).
v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

3ο Θέμα

20866.Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον y΄y και διέρχεται από το σημείο Α(1,2)
α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. **β)** Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα της παραβολής.
γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο Α΄(-1,2).
ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα y΄y και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.



Έλλειψη
2ο Θέμα

20658.Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha=4$, $\beta=2$ και $\gamma=2\sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c).

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2+y^2=16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

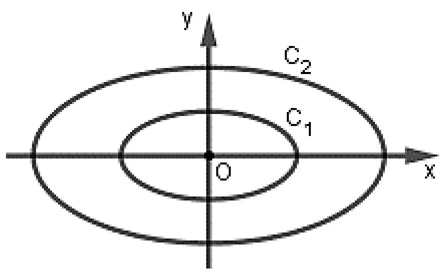
20718.Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

20865.Δίνονται οι ελλείψεις $C_1:\ x^2+4y^2=4$, $C_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

20883.Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C:16x^2+25y^2=400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ΄, ΑΑ΄ του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε΄.

β) Αν Ε΄(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε΄ και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

21308.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Β(0,4).

21647.Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0)$, $E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C.

β) την εκκεντρότητά της C.

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4,\frac{9}{5}\right)$.

21648.Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4,\frac{12}{5}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.
β) Να βρείτε την εξίσωση της C.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4,\frac{12}{5}\right)$.

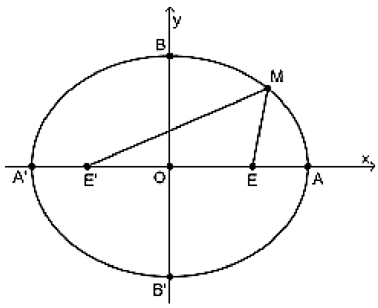
Δίνεται ότι $\sqrt{1369}=37$.

22168.Δίνονται η παραβολή $y^2=2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.
α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:
i. Την εξίσωση της παραβολής.
ii. Την εστία Ε της παραβολής.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

22192.Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1\ (1)$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(0,9) είναι σημείο της έλλειψης.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της Β(0,9).

22268.Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (1)$.
α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της Ε και Ε΄ , έχουν συντεταγμένες Ε(….., …..) και Ε΄(….., …..) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………». (
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2).

22556.Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0), A(5,0), B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.

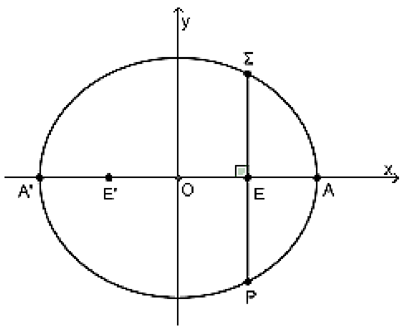


α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι

$$(A'A)=10 \text{ και } (B'B)=8.$$

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.
β) Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης.
Να αποδείξετε ότι $(ME')+(ME)=10$.

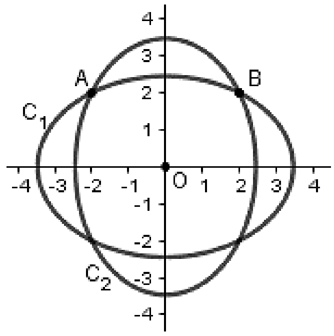
22558.Η έλλειψη του διπλανού σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0), E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A)=8$.



α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.
β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία Ε(2,0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.
i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

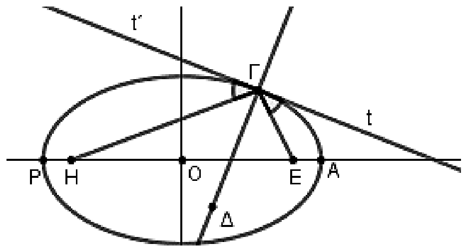
22564.Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.



α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.
γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες.

4ο Θέμα

20666.Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι ΡΗ =147,5 εκατομμύρια km και η μέγιστη ΑΗ = 152,5 εκατομμύρια km. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία Η και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του ΗΕ και x΄x τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας y΄y είναι η μεσοκάθετος του ΗΕ. Τέλος, η ευθεία ΓΔ είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ.



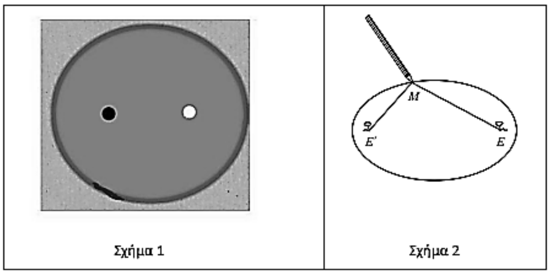
α) Να αποδείξετε $(\text{PA}) = 300 \text{ km}$, $(\text{HE}) = 5 \text{ km}$ και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$.
β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΗΓΕ.
γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες.

20722.Έστω $K(x,y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου Ε(3,0) και Ε΄(-3,0).
α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $(\varepsilon): 3x + 5y = 25$.
β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.
γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε.
δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $E\hat{M}E'$ και να βρείτε την εξίσωσή της .

20726.Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E'. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C .

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.



Σχήμα 1 Σχήμα 2

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα (1) ακριβώς στο σημείο Ε.
Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα.

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

22273.Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (1)$.

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

ii. Των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

Υπερβολή
2ο Θέμα

16128.Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε΄ και Ε.

β) Αν το Ν είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $\left|(NE')-(NE)\right|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

17942.Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C).

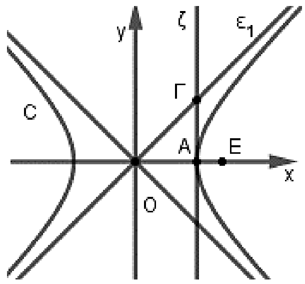
20721.Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

20869.Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C:\ x^2-y^2=1$, η εστία της Ε, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες ε_1, ε_2 της υπερβολής.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ.

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

21218.Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2-y^2=1$, $(C_2): y^2-x^2=1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1\left(\sqrt{2},0\right)$, $E_1'\left(-\sqrt{2},0\right)$.

β) Αν E_2, E_2' οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E_1'E_2'$ είναι τετράγωνο.

21649.Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C.

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(5,\frac{9}{4}\right)$.

21651.Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(5,\frac{9}{4}\right)$.

22169. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με ασύμπτωτη την $y=\frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο σημείο της $\left(5,\frac{9}{4}\right)$.

22196.Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2-y^2=25\ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22269.Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}-y^2=1\ (1)$.

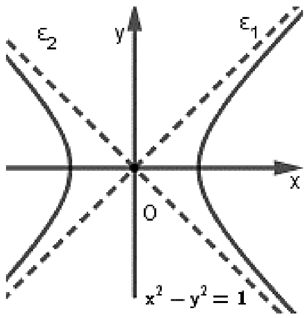
α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

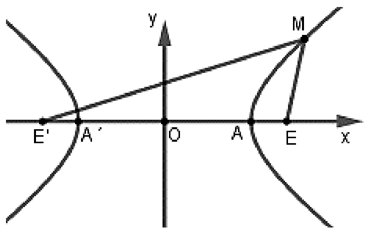
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A\left(\sqrt{5},\frac{1}{2}\right)$.



22051.Δίνεται η υπερβολή $x^2-y^2=1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.



22559.Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

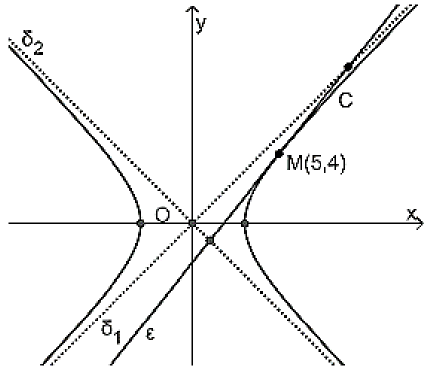
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) Έστω Μ ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την εστία Ε΄.

22561. Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2-y^2=9$, οι ευθείες δ_1,δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της M(5,4).



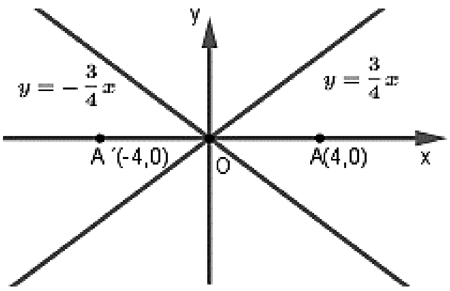
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι $5x-4y=9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2.

22567. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A'(-4,0)$, $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. α = 4 και β = 3.

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C.

22566. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2-y^2=4$.

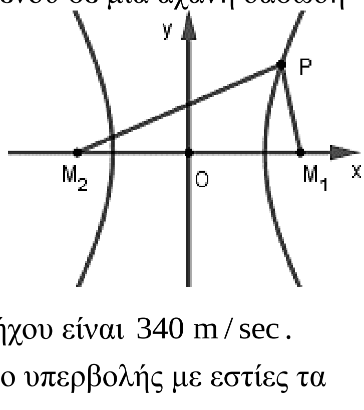
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι A(1,0) και A΄(-1,0).

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y=2x$ και $y=-2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y=-2x$ έχει εξίσωση $y=-2x+2$

4ο Θέμα

20653. Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2.

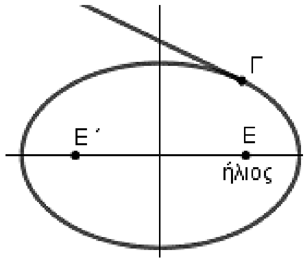


α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1)-(PM_2)=1360$ m. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec.

β) Να αποδείξτε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{111^2}=1$, θεωρώντας ως άξονα x΄x την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2=1369$.

22174. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.



α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5).

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με $x > 0$.

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

21657.Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα $xx΄$ της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

ii. την εκκεντρότητα της C.

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

32206.Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E΄(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5,\frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$.

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. Δίνεται ότι $\sqrt{1681}=41$.

3ο Θέμα

17944.Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, εστιακή απόσταση $EE'=2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2,\ \beta=\sqrt{3}$.

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Α ' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

1ο Θέμα

21973.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2=2px$, έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2+y^2=\alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda\left(x-x_0\right)$.