

2006

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x \quad (\text{I}) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x},$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$ και

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι

γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$

α) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\csc x}$

β) Να δείξετε ότι: $f(1) = 0$

γ) Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases} \text{ να είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

δ) Για την τιμή του $k=1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία

$(\varepsilon): y = 2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με

τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$|f(x) - x| \leq 1 \quad (\text{I}) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x - 2}{x} \cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \right].$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια

ώστε: $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\eta\mu x}{x-1} \quad (\text{I}) \text{ για κάθε } x \neq 1.$

α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x-1} = 0.$

β) Να βρείτε το $f(1)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{\pi-6}, \frac{\pi}{\pi-2}\right)$

τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0.$

ΘΕΜΑ 5ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$

με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και ισχύει ότι

$$f'(x) + f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty). \text{ Να}$$

δείξετε ότι

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0.$

ii) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

iii) να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2} \eta\mu x.$

ΘΕΜΑ 6ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) > 2007 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε}$$

ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση

$$y = 2006x + 1 \text{ σε ένα ακριβώς σημείο.}$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 2006x + 1$

έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2006x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

• Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$g'(x) = f'(x) - 2006 > 2007 - 2006 = 1 > 0$$

(1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το

πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

• Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε

διάστημα της μορφής $[0, x]$ με $x > 0$ άρα θα

υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = g'(\xi_1)x + g(0) > x + g(0)$$

$$(\text{αφού } g'(\xi_1) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_1)x > x).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + g(0)] = +\infty$ άρα και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της

μορφής $(\beta, +\infty)$ με $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$

για κάθε $x \in (\beta, +\infty)$. Επομένως $g(\lambda) > 0$

για $\lambda \in (\beta, +\infty)$.

Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε

διάστημα της μορφής $[x, 0]$ με $x < 0$ άρα θα

υπάρχει $\xi_2 \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(0) - g(x)}{0 - x} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_2)x + g(0) < x + g(0)$$

$$(\text{αφού } g'(\xi_2) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_2)x < x).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + g(0)] = -\infty$ άρα και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της

μορφής $(-\infty, \alpha)$ με $\alpha < 0$ τέτοιο ώστε

$g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$. Επομένως

$g(\kappa) < 0$ για $\kappa \in (-\infty, \alpha)$.

Η g ικανοποιεί λοιπόν τις προϋποθέσεις του

Θεωρήματος Bolzano στο $[\kappa, \lambda]$. Επομένως θα

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο,

ώστε $g(x_0) = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η $g(x) = 0$ έχει:

- μια τουλάχιστον ρίζα και
- μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

Άρα η $g(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$,

που σημαίνει ότι η C_f τέμνει την ευθεία με

εξίσωση $y = 2006x + 1$ σ' ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(-e, +\infty)$ η

οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = e^{-f(x)}$ για

κάθε $x \in (-e, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + e)$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν οι εικόνες του σημείου $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha \geq 0$ στο

επίπεδο, αν ισχύει $e^{f(x)} + 2e^x - |\overline{OM}| \cdot x \geq e + 2$

για κάθε $x \in (-e, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) = 2xf(x) - x^2f(2-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

με $f(2) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) - x)^2 = x^2[1 - f(2-x)] \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν η C_f έχει με τον άξονα $x'x$ δύο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x = 1$ η C_f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1) = 1$.

ΘΕΜΑ 9ο

α) Να αποδείξετε ότι

$$e^x - \eta\mu x \geq x + 1 - \eta\mu x \geq x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

$$\beta) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x},$$

$x \in [0, +\infty)$. Να βρείτε τους αριθμούς α, β ώστε

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \eta\mu x)' \text{ για}$$

κάθε $x \in [0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 10ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2,$$

$x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 11ο

Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}, f(2005) = \frac{1}{2}, f(2007) = 3 \text{ και}$$

$f(1)f(2)=f(3)f(4)$ να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha)=1$

β) υπάρχει $x_0 \in [1,2]$ ώστε $f^2(x_0)=f(1)f(2)$

γ) η f δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 12ο

Αν f συνεχής στο 0 , $f(0)=2006$ και ισχύει

$$xf(x)+x^4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu(\alpha x), \alpha \neq 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

A) i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το α .

B) i) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 13ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)x^3-x^2+(\alpha-1)^2x+2006,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$

ii) Για $\alpha=1$, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

ΘΕΜΑ 14ο

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στο σημείο $A(1, f(1))$

δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

• Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f''(x)-\frac{f'(x)}{x}=xe^x$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^x-e^x-e\frac{x^2}{2}+1$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e^{2004})$ και $f(2004)$.

ΘΕΜΑ 15ο

Δίνεται συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση h είναι 1-1

ii) Η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Αν για τη συνάρτηση h ισχύει και $h(x)+h(\lambda-x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου

$\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

ΘΕΜΑ 16ο

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$xf(x)-F(x)=xe^x-e^x+x^2+e+2, \text{ όπου } F$$

μία παράγουσα της f με $F(1)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$xf'(x)=xe^x+2x$$

ii) $f(x)=e^x+2x+1$

✓ ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x+1$,

$x>0, \lambda>0$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Έστω M το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της C_f . Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ την καμπύλη στην οποία κινείται το M .

iii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ , ώστε να ισχύει $\ln x \leq \lambda x-1$.

✓ ΘΕΜΑ 18ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(0)=0$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\ln(x^2+1), x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Αποδείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2006}} = +\infty$.

ΘΕΜΑ 19ο

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

• Για κάθε $x>0, y>0$ ισχύει

$$f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1)=1$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ΘΕΜΑ 20ο

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) + f(x) = 0$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ να

βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 21ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, $\alpha \neq \beta \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Αν το $f(\beta) = \alpha$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - y + 2006 = 0$.

Γ) Να αποδείξετε ότι

i) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)}$ και

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f(x) - 1}$

B) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 23ο

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = f'(0) = 1$ και για κάθε

$x \in [0, +\infty)$ ισχύει:

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = f(x)f'(x)$$

i) Να αποδειχθεί ότι $f^2(x) = 2e^x - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

ii) Αν επιπλέον η G είναι μία παράγουσα της

$$g(x) = \frac{1}{2e^x + 1} \text{ στο } [0, +\infty) \text{ με } G(0) = 0, \text{ να}$$

αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $2x - G(x) = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

2008

ΘΕΜΑ 24ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με: $g(x) = \frac{(1 - f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2}$,

$\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

γ) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$f(2008) < 0$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

δ) Αν $f(\kappa) \in [0, 1]$ και για τη συνάρτηση

$$h(x) = g(x) + 2008 + \beta, x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \text{ ισχύει}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$, να βρείτε τις τιμές των β και $f(\kappa)$.



ΘΕΜΑ 25ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \alpha^{\frac{1}{x}} + \alpha^x - 2\alpha x$, με $\alpha > 1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=0$.

ΘΕΜΑ 26ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η f έχει όριο στο $+\infty$
- $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

ΘΕΜΑ 27ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την

οποία ισχύουν: $\frac{xf(x)+5}{1+f^2(x)} = \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(0)=3$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$,
 $x \in \mathbb{R}$.

B. Αν $g(x) = \ln(f(x))$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g

β) Να βρείτε την g'

γ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1} .

ΘΕΜΑ 28ο

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για

την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10$

i) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=7$ β) $f'(3)=5$

ii) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = 5x - 8$.

β) Ένα σημείο Σ , που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε) . Αν ο ρυθμός

μεταβολής της τετμημένης του είναι $2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, να

βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OM\Sigma$.

✓ ΘΕΜΑ 29ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$

iii) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$

v) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο M .

ΘΕΜΑ 30ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$ (1) και

$f(1) = 1$.

A) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x \ln x + x$, $x > 0$.

β) $f(0) = 0$.

B) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 31ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$f'(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τη συνάρτηση f .

ΘΕΜΑ 32ο

A) Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f'(x) - f(x))e^x = (x-1)f'(x) - f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^{\kappa}-e^{\lambda}} < e^{\kappa-\lambda}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\kappa < \lambda$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε $x-2 = Af'(x) + Bf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 33ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$

ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$,

$x > 0$ και $g(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ 34ο

Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$f^2(x) - xf(x) + x^2 - 3 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν}$$

το $x = \alpha$ είναι κρίσιμο σημείο της f , να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = 2\alpha$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το α .

ΘΕΜΑ 35ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις

$$f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(0) = g(0) = 1, \text{ οι}$$

οποίες για κάθε

$$x \in (-1, +\infty) \text{ ικανοποιούν τις σχέσεις}$$

$$2f'(x) + f^2(x)g(x) = 2g'(x) + g^2(x)f(x) = 0$$

$$(1), f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΘΕΜΑ 36ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για $x \in \mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*. \text{ Αν η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ και

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι αδύνατη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι :

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$.

ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

ΘΕΜΑ 37ο

Δίνονται:

• Η ευθεία $(\varepsilon): y = x - e$

• Η συνάρτηση $g(x) = x \ln x - x$ και

• Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x) = x \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g .

β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

τότε ισχύει $f(x) = g(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $x \in (0, 1)$, ισχύει $-1 < f(x) < xe - 1$.

ΘΕΜΑ 38ο

Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με πρώτη

παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν

$$f(0) = 0, f'(0) > 0 \text{ και για κάθε } x \in [0, 1]$$

είναι $f(x) \geq 0$ και $f'(x) \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 39ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις

$$f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ οι οποίες για κάθε}$$

$$x \in [0, +\infty) \text{ ικανοποιούν}$$

τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0$$

$$\bullet 1 + F(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ και } 1 + G(x) = \frac{1}{f(x)}$$

όπου F, G παράγουσες των f, g με

$F(0) = G(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

β) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 40ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x) + 3f(x) = x^5 + x + 1$ (1) για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (-1, 0)$.

γ) Η f αντιστρέφεται.

δ) Το σημείο $N(0, \rho) \in C_{f^{-1}}$.

ε) Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 41ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\alpha}(x + \alpha)e^{\alpha-x}$,

$x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ οι γραφικές παραστάσεις των f και f' έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ) Η ευθεία $x = 1$ ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f' ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$, ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

2010

ΘΕΜΑ 42ο

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4 \quad (1).$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)).$$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ 43ο

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα

συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1$,

τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta_{\mu x})}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, 1)$.

✓ ΘΕΜΑ 44ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

✓ ΘΕΜΑ 45ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$

η οποία για κάθε $x \in (0, e)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\ln(f'(x)) = f(x) - \ln x.$$

A) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

B) Αν $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$, $x \in (0, e)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$1 - \ln x = \frac{1}{e^a} \text{ για τις διάφορες τιμές του } a \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 46ο

Θεωρούμε συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το σημείο $M(e^x, g(x))$

A) Αν ισχύει $|\overline{OM}|^2 = e^{2x}(1+x^2)$, $g(1)=e$ και

$$g(-1) = -\frac{1}{e} \text{ να αποδείξετε ότι } g(x) = xe^x.$$

B) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f'(x) - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και

$$B\left(\frac{3e}{2}, 1\right).$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): ex - 2y + 3 = 0$.

ΘΕΜΑ 48ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010) - f(x))$.

ΘΕΜΑ 49ο

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση fof' ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$(fof')(x) = -f(x) \quad (1),$$

να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) $f'(1)=1$.

δ) $(f'of')(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ε) $xf''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

στ) $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 50ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) + 2xf(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B) Αν $f(0)=1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ημf(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

✓ ΘΕΜΑ 47ο

A) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

B) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + f(4-x) = 3$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο

M , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.

δ) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη.

✓ ΘΕΜΑ 51ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \text{ για κάθε } (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g , για την οποία ισχύει

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και}$$

$$g(1) = 1.$$

ΘΕΜΑ 52ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \geq xe^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \ln x} = 1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της

συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ 53ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

ε) Να αποδείξετε ότι $F(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου F μία παράγουσα της f με $F(0) = 0$.

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x}.$

ΘΕΜΑ 54ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + 2f(x) = x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$.

ΘΕΜΑ 55ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς το πρόσημό της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι

$$(x-1)f'(x) < f(x) < \frac{x-1}{2}, \text{ για κάθε}$$

$$x \in (1, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 56ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x) + 3f'(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \geq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ 57ο

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = e^{-3x^2} + e^{-x^2}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e f(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ ως προς τη}$$

μονοτονία και τα ακρότατα.

2012**ΘΕΜΑ 58ο**

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

• $f(x)f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

με $x \in (0, +\infty)$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1, \text{ να αποδείξετε ότι}$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\beta+\alpha} \geq 3e^3.$$

ΘΕΜΑ 59ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sin^2 f(x) + 4f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ (1).}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \eta \mu x$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

ΘΕΜΑ 60ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο α με $\alpha > 0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f(xy) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y > 0$ (1)

• $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ (2)

A) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.

ii) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

iii) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με } \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \text{ για κάθε } x > 0.$$

B) Αν η ευθεία $(\varepsilon): x - 2\sqrt{\alpha}y + \alpha = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, να βρείτε τον τύπο της f .

ΘΕΜΑ 61ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$,

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

ικανοποιεί τη σχέση $\eta \mu(f(x)) = \frac{x}{x+1}$,

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ (1)}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$,

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

✓ ΘΕΜΑ 62ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|1 - \ln x|}{x}$,

$x > 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν η τετμημένη του σημείου $M(x, f(x))$

μεταβάλλεται με ρυθμό $1 \frac{m}{sec}$, να βρείτε το

ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου AOB , όπου $A(x, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$.

γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $(1, 1)$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $x(t) = t + 1$

ii) Η συνάρτηση $E'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[e - 1, +\infty)$.

✓ ΘΕΜΑ 63ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ (1)

• $f'(-1) < 1 < f'(1)$ (2)

• $f(0) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Αν $h(x) = \ln(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

✓ ΘΕΜΑ 64ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $4f''(x)f^3(x) = -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(1)

• $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

• $2f'(1) = f(1) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $(2f'(x)f(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$.

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.

iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.

✓ ΘΕΜΑ 65ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

• $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)

• $g^2(x) = g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

• $f(1) = 2$

• $g(1) = -1$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1} + \frac{2\ln x + 3}{g'(x)+1} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

ΘΕΜΑ 66ο

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f''(x) - f(x) = (4x + 2)e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

• $f'(0) = f(0) = 0$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2) = 3$.

✓ ΘΕΜΑ 67ο

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(f'(x)) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)
- $f(1) = 0$ (3)

α) i) Να βρείτε το $f'(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία $(\varepsilon): y = x + \kappa$ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

δ) Αν $\kappa < -1$ και $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ με $\alpha < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\alpha\beta(\ln \xi - 1) = \kappa\xi^2$.

ΘΕΜΑ 68ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με:

- $f(x) = xe^x + \alpha$
- $g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε) , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{3}{2}$ και η κοινή εφαπτομένη (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$

ΘΕΜΑ 69ο

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $xf'(x) + x^2f''(x) = 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(1) = 0$ (2)

$$\bullet f'(1) = 2 \quad (3)$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

✓ ΘΕΜΑ 70ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$e^{f(x)} \ln(f(x)) = e^{f(x)} \left[x + \ln(x^2 + 1) \right], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$.

γ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $h(f(x) + x - 3) = f(h(x)) + h(x) - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2e - 1$.

ΘΕΜΑ 71ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να βρείτε το $f(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση

$$x \left(x + \sin \frac{\pi}{x} \right) = x - 1 \text{ στο διάστημα } (0, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 72ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) \ln(f(x)) + 2xf'(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (2)$$

• $f(1) = e$ (3)

2014

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x$.

δ) Να αποδείξετε ότι $e + e^{\frac{1}{7}} > 2e^{\frac{1}{5}}$.

✓ ΘΕΜΑ 73ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f'(-x)f(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

• $f(0) = 1$ (2)

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$,

$x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$, να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση F .

ΘΕΜΑ 74ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 - e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

ii) $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2012x) \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$

ΘΕΜΑ 75ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sin^2 x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $f(x) > 2x^3 - 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να

ορίσετε την F^{-1} .

ΘΕΜΑ 76ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί

τη σχέση $f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$ (1)

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$.

ΘΕΜΑ 77ο

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, η

οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x + 2$ (1)

για κάθε $x \in [0, 8]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) $f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του.

ΘΕΜΑ 78ο

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για

την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2) - 5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = 5$ και

ii) $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7 \sin x$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ΘΕΜΑ 79ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η

συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln f(x)$.

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2)f'(x_1) = f(x_1)f'(x_2)$$

ii) Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2.$$

ΘΕΜΑ 80ο

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1$ και $g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f, g και $f - g$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-+3x}.$$

ΘΕΜΑ 81ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 2(\alpha+1)^x - \alpha^x, \alpha > 1.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f , για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$.

✓ ΘΕΜΑ 82ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet 2\sqrt{1-x}f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}, \text{ για κάθε}$$

$$x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$\bullet f(1) = 0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0, 1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

ii) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot f^{-1}(x))$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΘΕΜΑ 83ο

Έστω η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$f(2) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και έχει f' γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9) \cdot f(x+6) = (7x-32) \cdot f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$.

Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 84ο

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(3x^2 f^2(x) - 1) \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 0$, για κάθε $x \neq 0$
- $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(5x)$.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι

$$f^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < f(\alpha) \cdot f(\beta) \text{ για } 1 < \alpha < \beta.$$

ΘΕΜΑ 85ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ και
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$, για

κάθε $x, y > 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \alpha x$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

δ) Αν $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, να

βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

✓ ΘΕΜΑ 86ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τη

σχέση: $f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να

αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ εφάπτεται της γραφικής παράστασης}$$

C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

✓ ΘΕΜΑ 87ο

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + x + \alpha$ και

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x + \alpha}, \text{ όπου } \alpha > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ .

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha(x \ln x - \lambda) = \lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

✓ ΘΕΜΑ 88ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\square f(0) = 1$$

$$\square f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\square f'(x) = \frac{(1 + e^x)f(x)}{1 + f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha + 2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3}\right)$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

✓ ΘΕΜΑ 89ο

Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$\square f'(0) = f'(1) = 0$$

$$\square f(0) = 0$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - x^2 + x. \text{ Αν οι εφαπτόμενες της}$$

γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3 = \frac{1}{2}$, τότε

να αποδείξετε ότι:

i) $g(1) = 0$

ii) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $g'(\xi) + 2\xi = 1$.

ΘΕΜΑ 90ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$\square f'(x) + 1 = 2x \cdot (f(x) + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\square f(0) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1} \geq 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση

$$e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x}.$$

ΘΕΜΑ 91ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f^2(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ και

$f(x) + f(-x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$

β) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 92ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$, για την οποία ισχύουν:

$\square f(x) + x \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

$\square f(x - y) = \frac{f(x) + x}{f(y) + y} - x + y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

i) $f'(x) = f(x) + x - 1$

ii) $f(x) = e^x - x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α , ώστε να

ισχύει: $f(x) \geq \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha > -1$.

γ) Δίνεται το σημείο

$M(f(x) + x, f(\ln x) + e^2 - x)$ και $x > 0$, να

αποδείξετε ότι $|\overline{OM}| \geq e \cdot \sqrt{1 + e^2}$.

✓ ΘΕΜΑ 93ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$\square f(1) + f(-1) = 0$ και

$\square f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $(f'(x) + f(x)) \cdot e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(e^x - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη f^{-1} συνάρτηση της f .

2016

✓ ΘΕΜΑ 94ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x) = f(x) + g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.

γ) Ένα υλικό σημείο M με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x ,

αυξάνεται με ρυθμό $2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. Αν N είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και $A(0, \alpha)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $\alpha > 0$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού E του τριγώνου AMN κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$.

ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου M , τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός

μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN
είναι ίσος με $\left(2\ln 3 + \frac{8}{9}\right) \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$

✓ ΘΕΜΑ 95ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Ένα υλικό σημείο $A(\alpha, \sqrt{-\alpha})$, $\alpha < 0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t) = -\alpha(t)$. Επίσης υλικό σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\angle AOM = \theta$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA) = \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 96ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(e^x + 1) = x + e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.
δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2 + 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) - 1 = f^{-1}(e^2 + 3)$
ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

ΘΕΜΑ 97ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $e^\xi + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

ΘΕΜΑ 98ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x \ln x - x}$, $x > 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα.
β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x} = \kappa$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa > 0$.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}.$$

✓ ΘΕΜΑ 99ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x) \cdot e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $2f'(0) + 1 = 0$ και
- $f(0) = \ln 2$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1 + e^x}$,

$x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

στ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

✓ ΘΕΜΑ 100ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, δεν διατηρεί

σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα και είναι $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α, β) .
- β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$.
- γ) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa \neq \lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$.
- δ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

✓ ΘΕΜΑ 101ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$.

- α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.
- β) Να βρείτε:
- i) Τα κοινά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha > 0$.
- ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^\alpha, \alpha)$ και $B(e^{-\alpha}, \alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\alpha > 0$.
- γ) Έστω M και N τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

✓ ΘΕΜΑ 102ο

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 103ο

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - 1}{\eta\mu x}$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2016x) - 1}{x} = 4032f'(0).$$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει

$$f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε τον τύπο της.}$$

γ) Αν $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$.

ΘΕΜΑ 104ο

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x - 1 = 0$, με $x > 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) = x \ln x (f(x) - f'(x)) \text{ για κάθε } x > 1$$

και

$$\bullet f(e) = e^e$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Αν $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ΘΕΜΑ 105ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0 + 1, 2e^{x_0})$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{2-x}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha - 2x)}{x - \alpha} + \frac{f(2x)}{x - \beta} = 2016, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ έχει μία}$$

τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β) .

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.

ΘΕΜΑ 106ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{2} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$,

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

δ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

ε) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2ex^2 \ln|x| = \alpha$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 109ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\bullet 4f^2(x) - 4xf(x) = \alpha x + \beta \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου $\beta > \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) < 0$ να αποδείξετε ότι:

$$i) f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + x + \beta}}{2}$$

ii) Η εξίσωση $10xf(x) = 3\eta\mu(\pi x) - 3x + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 110ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}(x^3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ΘΕΜΑ 111ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet 0 \leq f(x) + 16 \leq (x+1)f'(x), \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(1) = 0$$

• Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

✓ ΘΕΜΑ 107ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{4x} - 8x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 108ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0$$

$$\bullet f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Να αποδείξετε ότι

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2).$$

γ) Να αποδείξετε ότι $(x+1)f(x) < f(x^2)$ για

κάθε $x \in (\rho, 1)$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης του (β) ερωτήματος.

✓ ΘΕΜΑ 112ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(e^x + 1)$,

$x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0) \text{ στο διάστημα } (0, +\infty).$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1).$$

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \ln^2\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 113ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(-1) = -\frac{1}{e^2}$$

$$\bullet xf'(x) = f(x) + x^2(2e^{2x} - 1), \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$,

$x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ 114ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + e}{x} = 1$$

•

$$f(x+y) = e^{2xy}(e^{y^2}f(x) + e^{x^2}f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1}) - e$$

, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) f'(0) = 1$$

$$\beta) f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) f(x) = xe^{x^2} - e, \quad x \in \mathbb{R}.$$

✓ ΘΕΜΑ 115ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(1) = -1$$

$$\bullet 2f'(x)(f(x) - 2x) = 1 + 4f(x), \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + x + 4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \eta\mu(\pi x), \quad x \in \mathbb{R}^*, \text{ έχουν ένα}$$

τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με

$$x_0 \in (1, +\infty).$$

$$\gamma) 3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x), \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha > \frac{7}{4}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \alpha)$.

✓ ΘΕΜΑ 116ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(0) = 0$$

$$\bullet |f'(x)| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } -2 \leq f(2) \leq 2.$$

$$\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση } f(x) = x^2 \text{ έχει}$$

το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$\gamma) \text{ Αν } f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R} \text{ τότε.}$$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2 \ln x).$$

ΘΕΜΑ 117ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 4x + 8$ και $g(x) = \sin x + x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{2}{x}\right) = 5$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)}$.

ε) Θεωρούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet h(1) = 8$$

$$\bullet h'(3) = 6$$

$$\bullet h(g(x)) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 1$.

ΘΕΜΑ 118ο

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta \mu x + 2)}{e^x + 1} = \frac{f(x)}{x + 2} \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα}$$

στο διάστημα $(-2, 0)$.

ΘΕΜΑ 119ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1} \text{ και } g(x) = 1 + x(1 - \ln x).$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g

που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της C_g με τετμημένες αντίστροφες στα

οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho > 1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της

όταν $x = \rho$ και επιπλέον ισχύει $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$.

δ) Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2\rho}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0 < \alpha < \beta$.

ii) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}.$$

ΘΕΜΑ 120ο

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f'(1) = 1 \text{ και } f'(-1) = -1, \text{ η οποία ικανοποιεί}$$

τη σχέση: $x^2(xf'(x) - 4) = 1 - 2x^2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}^*$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(f(x) - 2) - x + 1}{3\eta\mu^2(x-1) - (f(x) - 2)^2}.$$

ΘΕΜΑ 121ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x - 1 + \ln x.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$.

ΘΕΜΑ 122ο

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2e^{\frac{x^2}{8}}, \quad x \in [0, +\infty) \text{ και}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και

$$f^{-1}(x) = 2\sqrt{2\ln \frac{2}{x}}, \quad x \in (0, 2].$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \ln\left(2\ln \frac{2}{x}\right) = 0 \quad \text{έχει μοναδική λύση στο}$$

διάστημα $(0, 2)$.

ΘΕΜΑ 123ο

Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_\alpha(x) = \frac{3\alpha}{e^x + \alpha}, \quad \alpha > 0.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f_α ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ η γραφική παράσταση C_α της συνάρτησης f_α έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της C_α έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

ΘΕΜΑ 124ο

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f :$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με } f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}, \quad \text{για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$

να αποδείξετε:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2$

ii) $\lambda = \frac{1}{2}$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) > \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \text{να βρείτε το σύνολο}$$

τιμών της.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) +$$

$$+ f(4)x(x+1) = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}.$$

ΘΕΜΑ 125ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f : (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2} \quad \text{και}$$

$$f(e) = \frac{1}{e}, \quad \text{η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:}$$

$$\bullet f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\bullet f'(x) = -(\ln x + 1)f^2(x) \quad \text{για κάθε}$$

$$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$,

$$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

✓ ΘΕΜΑ 126ο

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$, η

οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \leq \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$

για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

ε) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{f(x)}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{είναι συνεχής.}$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{είναι μία αρχική}$$

της h στο διάστημα $(0, +\infty)$ και να υπολογίσετε

$$\text{το ολοκλήρωμα } I = \int_0^e h(x) dx.$$

ΘΕΜΑ 127ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + 2f(x) = 3e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι :

i) $e^{\frac{x}{3}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} e^{\frac{x}{2}}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} = \sqrt[3]{3}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

ΘΕΜΑ 129ο

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Για τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f :

i) Να αποδείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$

με $x_1 \neq x_2$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0.$$

✓ ΘΕΜΑ 128ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :

$(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(e) = 1$, η οποία για κάθε

$x \in (1, +\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) > 0$$

$$\bullet xf'(x) + f^2(x) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \varepsilon \phi x$,

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Ένα υλικό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα $4\alpha \text{ cm/sec}$. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο A , τότε:

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0 , που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(e, f(e))$.

ii) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1} \text{ rad/sec}$.

✓ ΘΕΜΑ 130ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e-1$.

2018

ΘΕΜΑ 131ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)e^x + 1$

και $g(x) = (x \cdot e^x - e^x + 1)x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

ΘΕΜΑ 132ο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x) = \frac{e^x}{3f^2(x) + 2f(x) + 1}, x \in \mathbb{R}^*.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

ΘΕΜΑ 133ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x, x > 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 β) i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
 ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2e - f(x)) > e$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x - (ex + 1)\left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e}\right) = 2$.
 δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$. Να αποδείξετε ότι, αν για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq \alpha$ για κάθε $x > 0$, τότε $\frac{\alpha}{2} + e \geq 1$.

ΘΕΜΑ 134ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$ έχουν τετμημένες -2 και 4 . Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, +\infty)$.

- α) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(-\frac{7}{4}\right)$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-0,1)x^3 + f(1)x^2 + f(2)}{f(-1)f(5)x^2 + f(0)}.$$

 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^{3x}) = f(e^{2x}) + f(e^{4x})$.
 δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2, 4)$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \sqrt[4]{f^3(-0,1) \cdot f(2)}$.

ΘΕΜΑ 135ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ και

$$g(x) = (x \ln x - x + 1) \ln x, x \in (0, +\infty).$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΘΕΜΑ 136ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t \right) = \frac{f'(x)}{2(x+1)},$$

$$x \neq -1 \text{ και } f(-1) = \frac{2}{e}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$.
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1) \leq f(x^2) + 2ex$ για κάθε $x \geq 1$.

✓ ΘΕΜΑ 137ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1) + f^2(3) \leq 2f(1) \cdot f(3)$
- $f'(1) = 2$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$
 γ) Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x) - 2x + 2)}$$

✓ ΘΕΜΑ 138ο

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 1$

• $(x-1)f''(x) + 2f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1) = \frac{2}{3}$.

δ) Έστω συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1) = 1$ και $(g(x) - f(x))(g(x) + 3f(x)) = 0$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f = g$.

ε) Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec . Αν A είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και B τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABM τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $(1, f(1))$.

✓ ΘΕΜΑ 139ο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: (-e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$e^{f(x)} = \frac{1}{f'(x)},$$

για κάθε $x \in (-e, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \ln(x+e), x \in (-e, +\infty).$$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

δ) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό α , αν ισχύει $e^{f(x)} + 2e^x - x\alpha \geq e + 2$ για κάθε $x > -e$

ΘΕΜΑ 140ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 1 \\ e^{x-1} + \ln x - 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ε) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa > 1$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = \frac{f(\kappa) + \kappa f(\kappa+1) + (\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}.$$

ΘΕΜΑ 141ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln(e^x + x), & x \geq 0 \end{cases}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

ι) στο πεδίο ορισμού της.

ii) στο διάστημα $[0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = x$.

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$, η εξίσωση

$$\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x - \alpha} = 0 \quad (1) \text{ έχει μία}$$

τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \alpha)$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - | \ln x |) = 0.$$

ΘΕΜΑ 142ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x$ και

η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της

$A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$.

α) Να βρείτε τα σημεία A , B και την εξίσωση της ευθείας ε .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό

$x \in (-2, -1)$, στο οποίο η συνάρτηση f

παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

ΘΕΜΑ 143ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

και $g(x) = \ln^2 x - \frac{1}{x}, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 144ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $(1 + \eta \mu x)^2 f'(x) = \sigma \upsilon \nu x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$

• $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \eta \mu x}, x \in [0, \pi].$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x - x}{x f(x)}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση

$$2f(x) = (2x - \pi)f'(x) + 1$$

ΘΕΜΑ 145ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \sqrt{\epsilon \rho x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 + f^4(x)}{2f(x)}$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση f

είναι παραγωγίσιμη στο 0.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$$

και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1, f^{-1}(1))$.

ΘΕΜΑ 146ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{με } f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x - 1}, & 0 < x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η εξίσωση $f^{-1}(x - 1) = x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = \frac{1}{2}$ και ότι η

συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα.

στ) Να αποδείξετε ότι

$$(x - 1)f'(x) + 1 < f(x) < \frac{x + 1}{2} \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 147ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $2f(x) > x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• $f^2(x) + (4 - x)f(x) = 12 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{f(x) - x + 4}{x - 12}$.

✓ ΘΕΜΑ 148ο

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{(x^2+1)h} - 1)(f(x) - f(x+2h))}{4h^2} = xf(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet f(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Σημείο $M(x, f(x)), x > 0$ κινείται στη

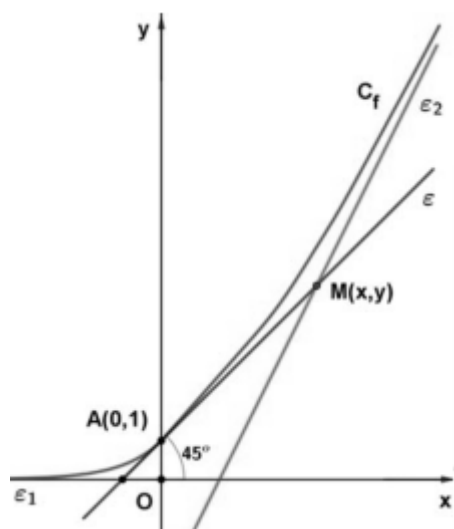
γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Αν N είναι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ και K, Λ οι προβολές των N, M αντιστοίχως στον άξονα $x'x$, να προσδιορίσετε τις κορυφές K, Λ, M, N ώστε το εμβαδόν του τετράπλευρου $K\Lambda MN$ να γίνεται μέγιστο.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{(x^2 + 1)(e^x - 1)}{x^2 - x + 1} = x$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)f(x)}{2\eta\mu x + 3}$.

ΘΕΜΑ 149ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει



συνεχή παράγωγο. Η γραφική παράσταση C_f της f έχει ασύμπτωτες τις ευθείες: $\epsilon_1: y = 0$ στο $-\infty$ και την $\epsilon_2: y = 2x - 3$ στο $+\infty$. Η ευθεία ϵ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \dots$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{f(x) - 2x - 1}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} ,

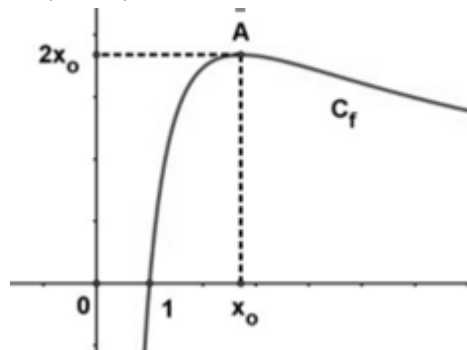
θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

ε) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ϵ της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y = x + 1$ και να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

ΘΕΜΑ 150ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:



• Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

• Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f(x_0) = 2x_0$ για κάθε $x \in (0, x_0]$.

• Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεία $y = 0$.

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x}{(x - x_0)f(x)}$$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0 < \frac{2x_0}{x_0 - 1} < f'(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

✓ΘΕΜΑ 151ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) \geq x \ln x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in [1, e]$.

ι) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $[1, e]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ και στη συνέχεια θεωρώντας ότι η

f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της A

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, e]$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\ln \frac{e+1}{2} < \frac{e}{e+1}$.

ΘΕΜΑ 152ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις

$$f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με}$$

$$f(e) = g(1) = 1, f(e^{-1}) = -1 \text{ και } g(e) = e^{-1}, \text{ οι}$$

οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\bullet f'(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet xf(x)f'(x) + x^2g^2(x) + x^2f(x)g'(x) = 1,$$

$$\text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (2).$$

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x},$$

$$x \in (0, +\infty).$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$, $x \in (0, +\infty)$, τότε:

β) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_h η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .