

Θεώρημα Μεσης Τιμής

1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. Να δείξετε ότι:

- i. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[e, e^2]$
- ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 0$
- iii. $f(\xi) > \frac{1}{\xi}$

2.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$.

3.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$

4.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $f(1) = 2$ και $f(2) = 4$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2(3 - x_0)$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$

5.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη στη C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ τέμνει τη C_f στο $B(\beta, f(\beta))$, $\beta > \alpha$ να δείξετε ότι:

- i. Η f' δεν είναι $1 - 1$
- ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

6.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με $\frac{f(1)+f(3)}{2} = f(2) + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 2$.

7.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ και $[f(\gamma) - f(\alpha)] \cdot [f(\beta) - f(\gamma)] < 0$ (1), να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

8.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = (1 - \xi)f'(\xi)$
- ii. Υπάρχει $x_0 \in (0, \xi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < \frac{f'(\xi)}{\xi}$

9.

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$.

Να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ για κάθε $x < \alpha$.

10.

Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(0) = 0$, να δείξετε

ότι $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

11.

Να δείξετε ότι:

i. $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ για κάθε $x > 0$.

ii. $x + 1 < e^x < xe^x + 1$ για κάθε $x < 0$.

iii. $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ για κάθε $x > 1$.

12.

Εστω f' γνησια αυξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι : i) $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

ii) Να δείξετε ότι: $2e^5 < e^3 + e^7$

13.

Να λύσετε την εξίσωση : $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$

14.

Αν η f είναι 2 φορές παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχυει $f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η στη C_f δεν υπάρχουν τρια σημεια συνευθειακα.

15.

Αν για την f ισχυει ότι: $f(\alpha) = f(\beta)$, παραγωγισιμη στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$