



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσανατολισμός
γ λυκείου

Η Θεωρία σε Ερωτήσεις Λανθασμένες Προτάσεις με Αντιπαραδείγματα

Μάκος Σπύρος

2022 - 23

A. Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

- ♦ Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

(Επαναλ. 2018, 2019)

Απάντηση:

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Σχόλια:

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το **πεδίο ορισμού** A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Χρήσιμες Σχέσεις: Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A και $x_1, x_2 \in A$, τότε:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

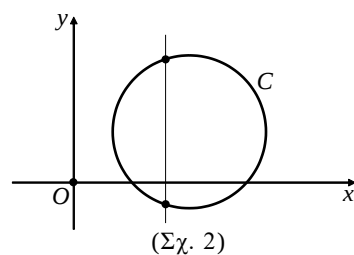
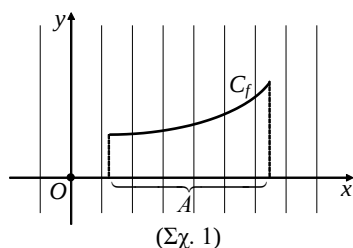
- ♦ Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

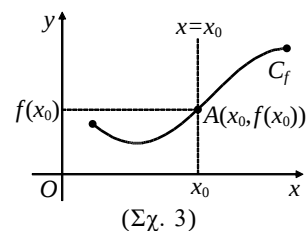
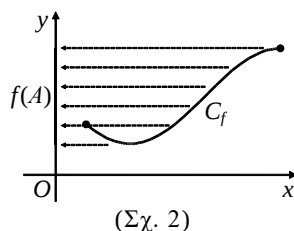
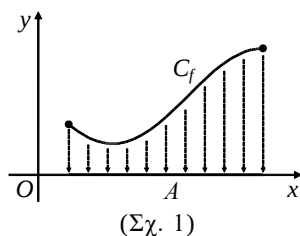
Παρατηρήσεις:

- Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η **εξίσωση της γραφικής παράστασης** της f .
- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f **το πολύ ένα κοινό σημείο** (Σχ. 1). Έτσι ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 2).



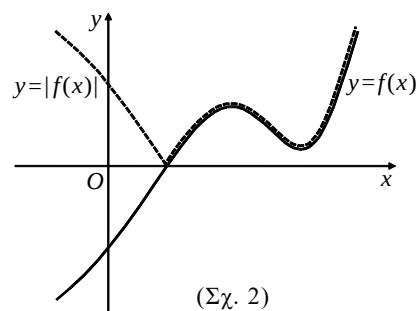
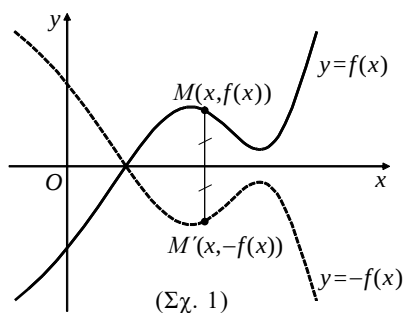
Σχόλια:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f (Σχ. 1).
- Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f (Σχ. 2).
- Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 3).

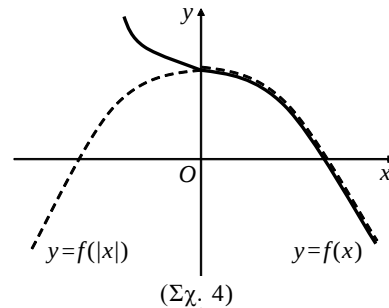
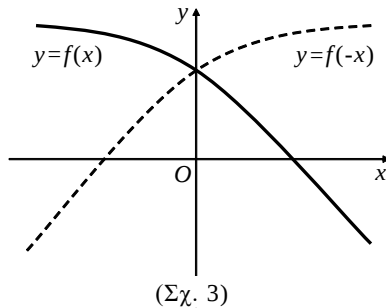


Συμμετρίες:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$ (Σχ. 1).
- Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν (Σχ. 2).



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(-x)$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της f (Σχ. 3).
- Η γραφική παράσταση της $f(|x|)$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται δεξιά από τον άξονα $y'y$ και από τα συμμετρικά αυτών, ως προς τον άξονα $y'y$ (Σχ. 4).



- Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$ (π.χ. $f(x) = ax^2$).
- Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης είναι συμμετρική, ως προς την αρχή των αξόνων (π.χ. $f(x) = ax^3$).

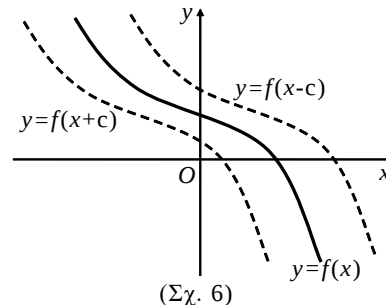
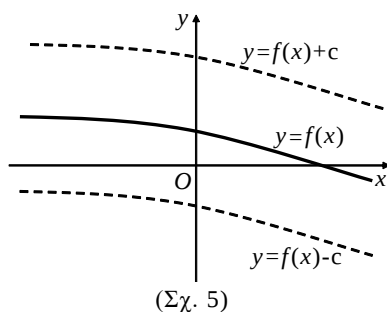
Θυμίζουμε ότι:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται:

- **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$
- **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

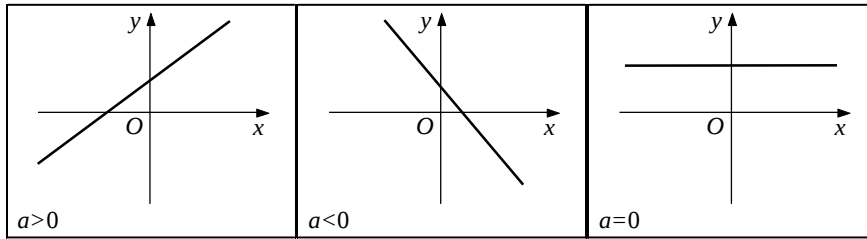
Μετατοπίσεις:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + c$ ($g(x) = f(x) - c$ αντίστοιχα), $c > 0$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες πάνω (κάτω αντίστοιχα) (Σχ. 5).
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x + c)$ ($g(x) = f(x - c)$ αντίστοιχα), $c > 0$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες αριστερά (δεξιά αντίστοιχα) (Σχ. 6).

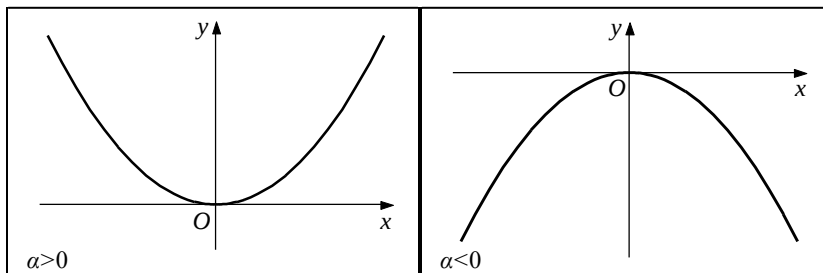


Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων:

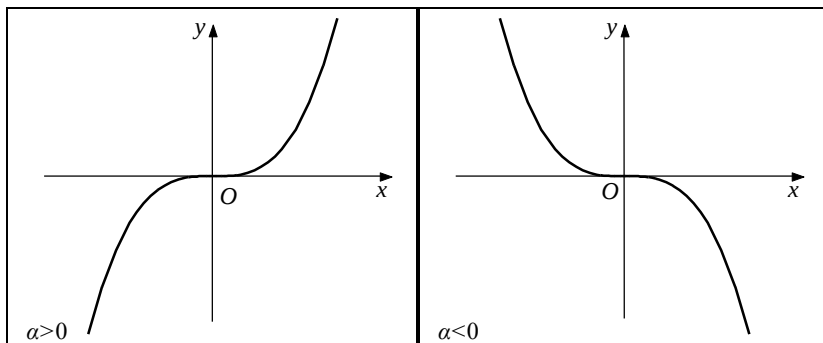
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$



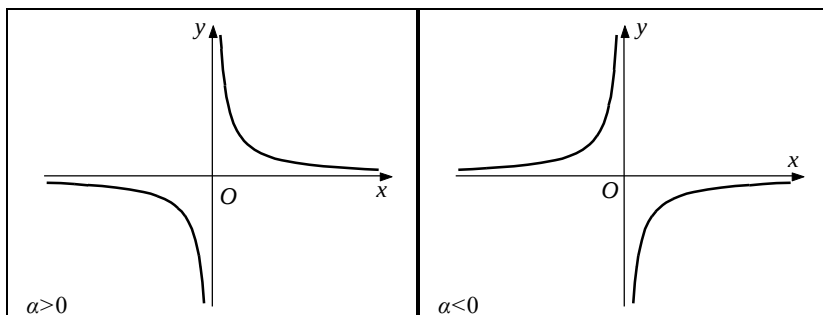
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$



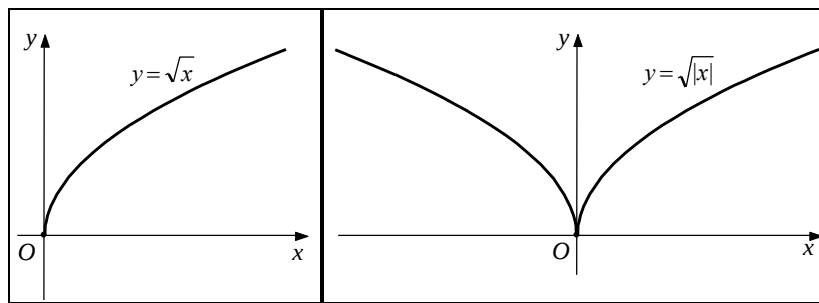
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$



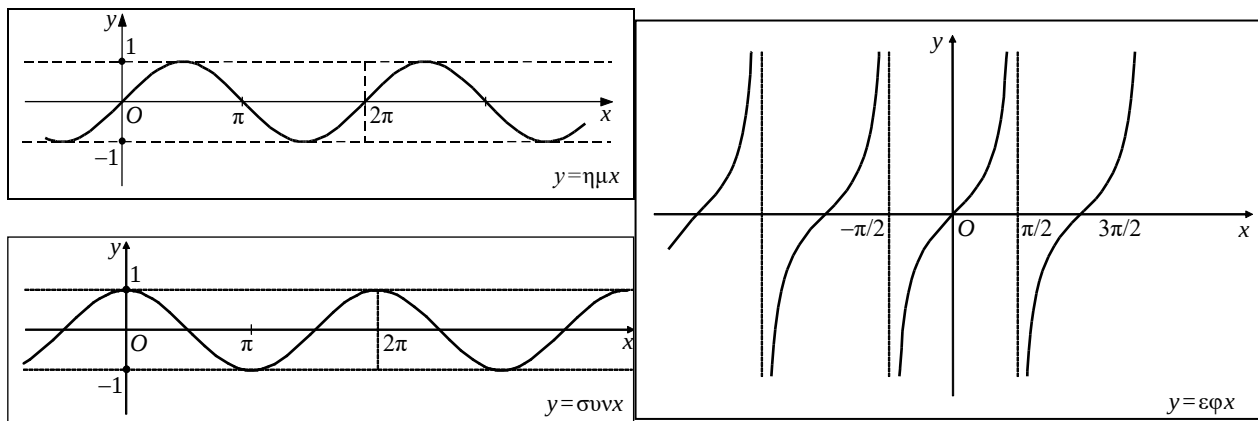
- Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$



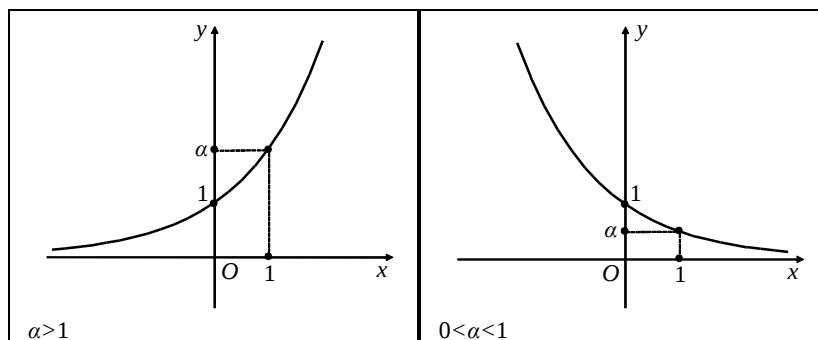
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$



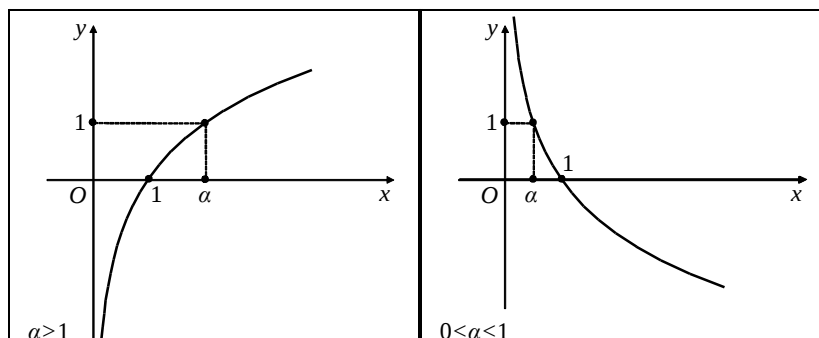
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \epsilon\varphi x$



- Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$



- Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_{\alpha} x$, $0 < \alpha \neq 1$



♦ Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(2016)

Απάντηση:

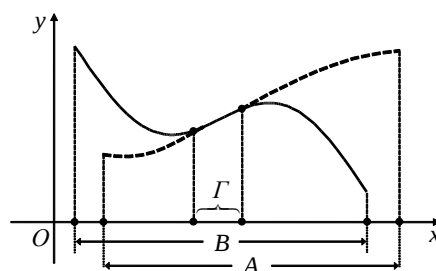
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

(Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$)

Χρήσιμη Σχέση: $f = g \Leftrightarrow C_f \equiv C_g$

Παρατήρηση: Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ** .



♦ Έστω A, B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Απάντηση:

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f + g$, **διαφορά** $f - g$, **γινόμενο** $f \cdot g$ και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x / x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$

Παρατήρηση: Ορίζουμε ως **δύναμη** f^v τη συνάρτηση με τύπο $(f^v)(x) = f^v(x)$ και πεδίο ορισμού όμοιο με το πεδίο ορισμού της f .

Χρήσιμη Σχέση: $f^v(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Προσοχή:

Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο A .

- $f(x) \cdot g(x) = 0 \not\Rightarrow$ (για κάθε $x \in A, f(x) = 0$) ή (για κάθε $x \in A, g(x) = 0$)
- $f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow$ για κάθε $x \in A, f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$

♦ Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Να ορίσετε τη σύνθεση της f με τη g .

Απάντηση:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με τη g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Παρατηρήσεις:

- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$
- Η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

Προσοχή:

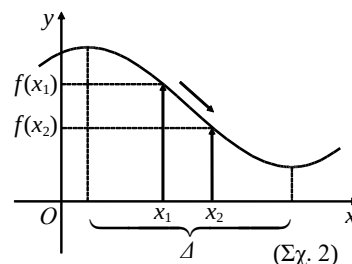
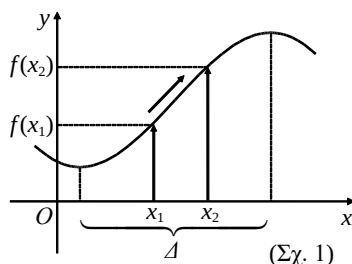
- Δεν ισχύει πάντοτε: $f \circ g = g \circ f$
- Ισχύει όμως: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$

♦ Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. 1)
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. 2)



Σχόλια:

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο Δ .
- Μία συνάρτηση f λέγεται, απλώς:
 - **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
 - **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:
$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Χρήσιμες Προτάσεις:

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε:
 - αν η f είναι γν. αύξουσα στο Δ , τότε: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$
 - αν η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ , τότε: $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε:
 - η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, το πολύ, ρίζα στο Δ
 - η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, το πολύ, σημείο με τετμημένη $x_0 \in \Delta$
 - αν $0 \in f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, ακριβώς, ρίζα στο Δ
 - αν $\eta \in f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μία, ακριβώς, ρίζα στο Δ

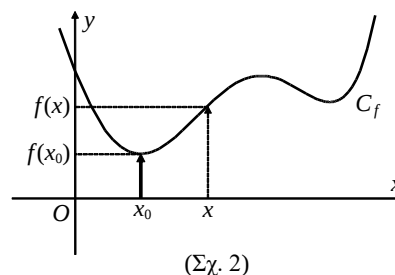
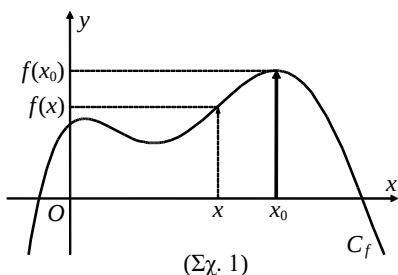
Προσοχή: Αν μια συνάρτηση f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο διαστήματα A_1 και A_2 του πεδίου ορισμού της, **δε σημαίνει** ότι απαραίτητα θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας και στην ένωση $A_1 \cup A_2$.

♦ Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο το $f(x_0)$ και πότε ελάχιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει:

- στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 1)
- στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. 2)



Σχόλιο: Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f .

Προσοχή: Αν $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in A$, δεν ισχύει πάντοτε $\min f = \alpha$ και $\max f = \beta$.

Αυτό ισχύει, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$, τέτοια ώστε $f(x_1) = \alpha$ και $f(x_2) = \beta$.

♦ Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται “1-1”;

Απάντηση:

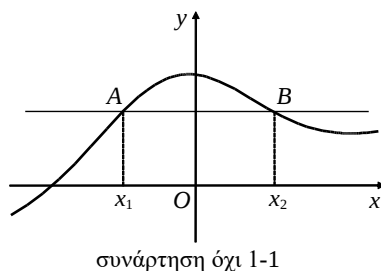
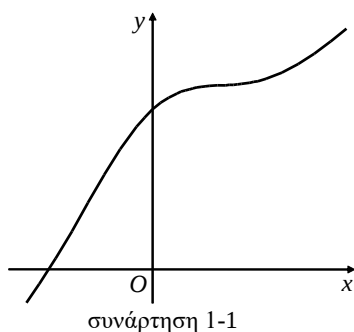
Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση “1-1”**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

Σχόλια:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση “1-1”**, αν και μόνο αν:

- Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.
- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της εξίσωσης $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Γραφική ερμηνεία



Χρήσιμες Προτάσεις:

- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη**, τότε είναι και “1-1”.
- Αν μια συνάρτηση είναι “1-1”, τότε **δεν είναι απαραίτητα** και γνησίως μονότονη.
- Αν μια συνάρτηση **δεν είναι “1-1”**, τότε **δεν είναι γνησίως μονότονη**.

♦ Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια “1-1” συνάρτηση. Ποια συνάρτηση λέγεται αντίστροφη της f ;

(2019)

Απάντηση:

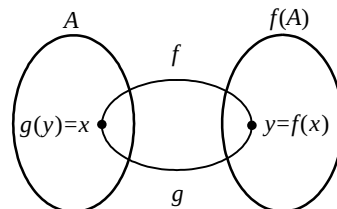
Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι “1-1”, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού

της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y το x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} .



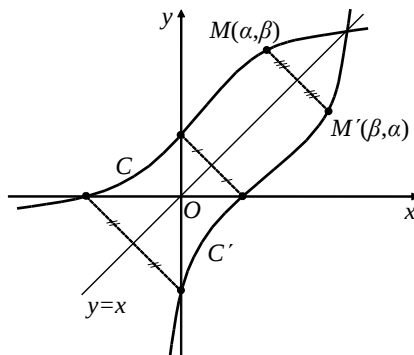
Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Χρήσιμοι Τύποι:

1. $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$
2. $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$
3. $f : "1-1" \Leftrightarrow f : \text{αντιστρέψιμη}$
4. $(f^{-1})^{-1} = f$

Χρήσιμη Πρόταση: Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη (με το ίδιο είδος μονοτονίας) στο $f(\Delta)$.ⁱ

Παρατήρηση: Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$** που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$



Κοινά Σημεία C_f και $C_{f^{-1}}$:

- Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη **λύση του συστήματος:**

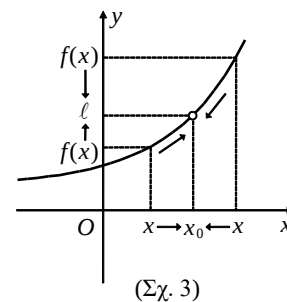
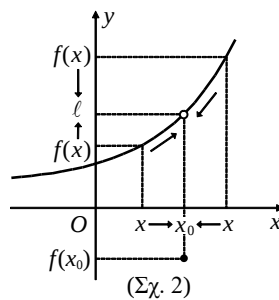
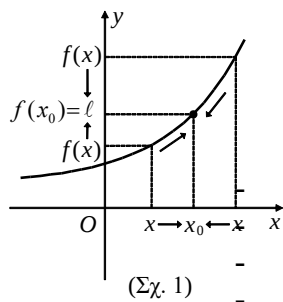
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \quad \text{ή του:} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \quad \text{ή του:} \quad \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

- Αν η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα**, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ μπορούν να βρεθούν **και** από τη **λύση της εξίσωσης:**

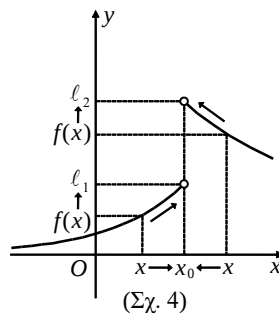
$$f(x) = x \quad \text{ή της:} \quad f^{-1}(x) = x \quad \text{ii}$$

Ορια:

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0 ", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .
- Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 1, 2) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 3).
- Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 1) ή διαφορετική από αυτό (Σχ. 2).



- Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0 , ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0 (Σχ. 4).



Χρήσιμες Σχέσεις:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ (αν η f είναι ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$)
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (αν η f είναι ορισμένη στο (x_0, β) , αλλά δεν ορίζεται στο (α, x_0))
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (αν η f είναι ορισμένη στο (α, x_0) , αλλά δεν ορίζεται στο (x_0, β))
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- 5α. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$
- 5β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = \ell$

6α. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

6β. $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu = x_0^\nu$

7. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

8α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

8β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

9α. Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$

9β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

10α. Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$$

10β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

11. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) = g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Ιδιότητες Ορίων:

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις)

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις)

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

7. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\nu = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Προσοχή:

- **Δεν ισχύουν πάντοτε:**

- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x))$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, τότε υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- **Ισχύουν όμως:**

- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ **iii**
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ **iv**

❖ Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

❖ Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Απόδειξη:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Κριτήριο Παρεμβολής:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{τότε}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

(Επαναλ. 2016)

Χρήσιμοι Τύποι:

1. $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Χρήσιμες Σχέσεις:

1α. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

1β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

2α. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

2β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

3α. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$

3β. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

5α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

5β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

8α. Αν $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ **v**

8β. Αν $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ **vi**

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

Όριο Αθροίσματος:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

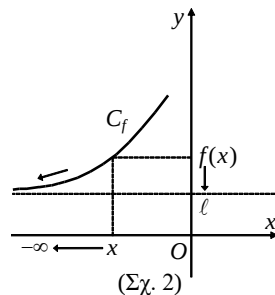
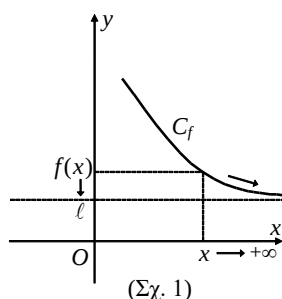
Όριο Γινομένου:

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της fg είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Απροσδιόριστες Μορφές:

- **Αθροίσματος:** $(+\infty) + (-\infty)$ και $(-\infty) + (+\infty)$
- **Διαφοράς:** $(+\infty) - (+\infty)$ και $(-\infty) - (-\infty)$
- **Γινομένου:** $0 \cdot (\pm\infty)$
- **Πηλίκου:** $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- **Δυνάμεων:** 0^0 , $(\pm\infty)^0$ και $1^{\pm\infty}$

Σχόλιο: Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ (Σχ. 1). Ανάλογα στο $-\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$ (Σχ. 2).



Χρήσιμοι Τύποι:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^\nu} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ^{vii}
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$ ^{viii}

Παρατήρηση: Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Όριο Πολυωνυμικής Συνάρτησης:

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

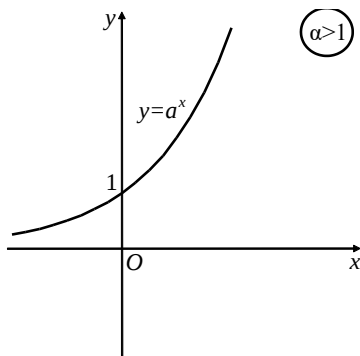
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

Όριο Ρητής Συνάρτησης:

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_0}$, με $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

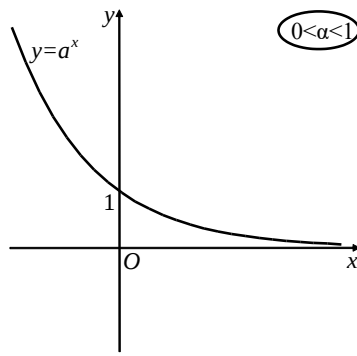
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

Όρια Εκθετικής – Λογαριθμικής Συνάρτησης :



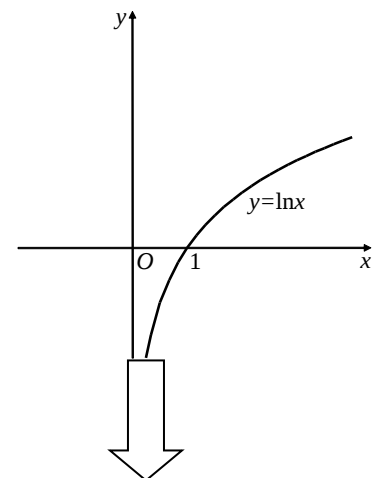
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Προσοχή: Τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta \mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma \upsilon \nu x$ δεν υπάρχουν.

♦ Τι ονομάζεται ακολουθία;

Απάντηση:

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

♦ Πότε η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$;

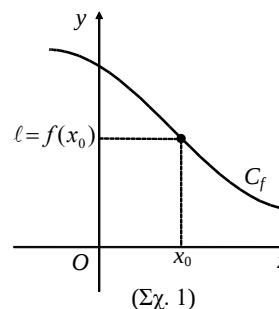
Απάντηση:

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει: $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$.

♦ Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

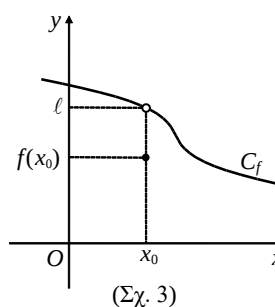
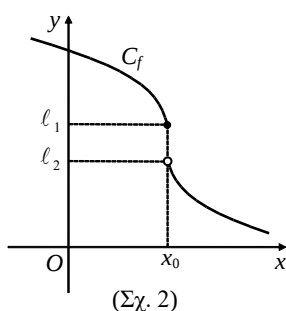
Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (Σχ. 1).



Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

- Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 (Σχ. 2) ή
- Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 (Σχ. 3).



♦ Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Παρατηρήσεις:

- Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση P είναι **συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

- Κάθε **ρητή** συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι **συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

- Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι **συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

- Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι **συνεχείς**.

Θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f + g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

♦ Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) ;

Απάντηση:

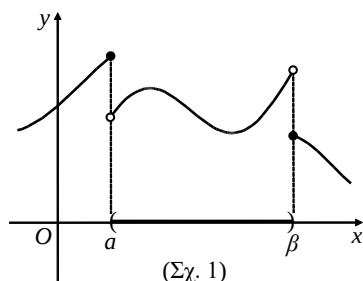
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β)** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) (Σχ. 1)

♦ Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

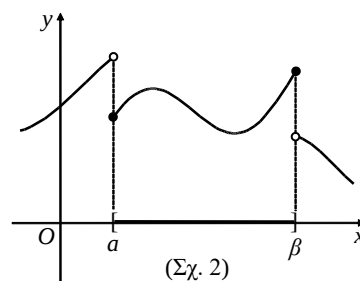
(2017)

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ & $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ (Σχ.2)



(Σχ. 1)



(Σχ. 2)

Θεώρημα Bolzano:

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

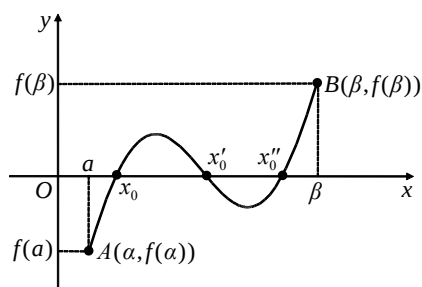
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της συνάρτησης f στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Δηλαδή, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

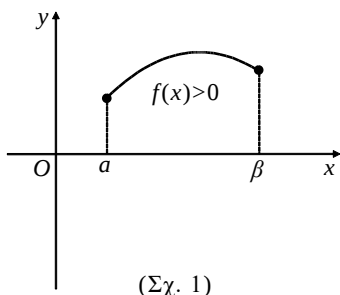
Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ. Bolzano:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

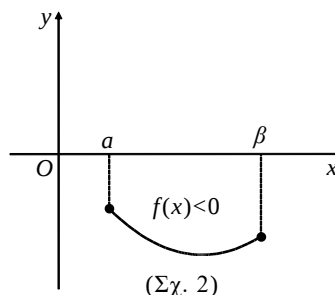


Σχόλια:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ (Σχ. 1 και 2).

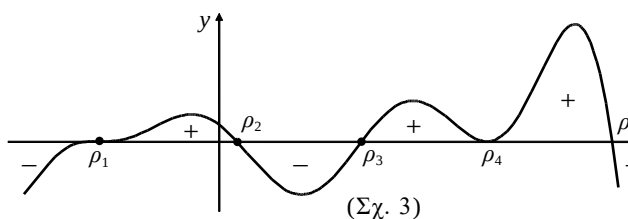


(Σχ. 1)



(Σχ. 2)

- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3).



(Σχ. 3)

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών:

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

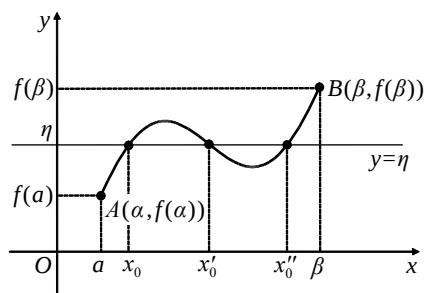
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και $\left\{ \begin{array}{l} \text{για κάθε αριθμό } \eta \text{ μεταξύ των } f(\alpha) \\ \text{και } f(\beta) \text{ υπάρχει ένας, τουλάχιστον,} \\ x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιος, ώστε } f(x_0) = \eta \end{array} \right\}$ τότε

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = \eta$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .
Δηλαδή, η C_f τέμνει την ευθεία $y = \eta$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

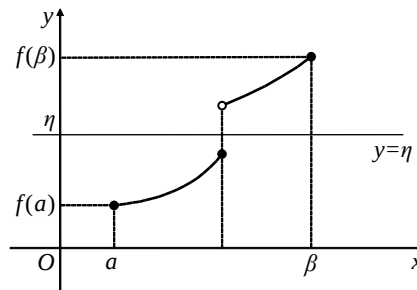
- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$,
αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Bolzano.

Σχόλιο: Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις τιμές.

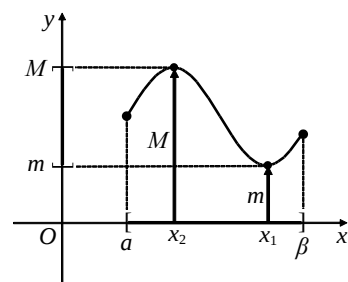
**Παρατηρήσεις:**

- Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας **συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης** f είναι **διάστημα**.
- Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας **συνεχούς συνάρτησης** f είναι ή **μονοσύνολο** ή **διάστημα**.

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$



Σχόλια:

- Το **σύνολο τιμών** μιας **συνεχούς** συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το **κλειστό διάστημα** $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της, δηλ. $f(\Delta) = [m, M]$.

Αν $m = M$, τότε η f είναι **σταθερή** στο $[\alpha, \beta]$, οπότε το **σύνολο τιμών** της είναι **μονοσύνολο**, δηλ. $f(\Delta) = \{c\}$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα:

➤ $A = (\alpha, \beta)$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$ (Σχ. 1)

➤ $A = [\alpha, \beta]$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

➤ $A = (\alpha, \beta]$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta) \right]$

➤ $A = [\alpha, \beta)$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$

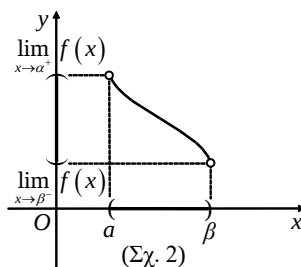
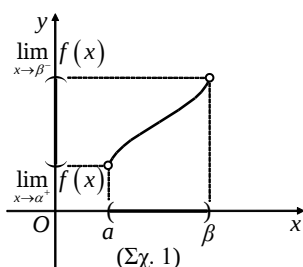
- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα:

➤ $A = (\alpha, \beta)$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$ (Σχ. 2)

➤ $A = [\alpha, \beta]$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$

➤ $A = (\alpha, \beta]$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left(f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right]$

➤ $A = [\alpha, \beta)$, τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(A) = \left[\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha) \right)$



- Αν μια **συνεχής** συνάρτηση f , ορισμένη στο (α, β) , έχει την ιδιότητα $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$ (ή αντίστροφα), τότε το **σύνολο τιμών** της είναι το $\mathbb{R}$. ^{ix}

B. Διαφορικός Λογισμός

- ♦ Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 ;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Παρατηρήσεις:

$$\begin{aligned} - \quad f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0+h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ - \quad f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0 \cdot h}{=} \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 \cdot h) - f(x_0)}{h - 1}, \text{ για } x_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Συμβολισμοί Lagrange – Leibniz:

Η παράγωγος της f στο x_0 ($f'(x_0) \rightarrow$ συμβολισμός Lagrange) συμβολίζεται επίσης με:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ και } \frac{df(x_0)}{dx} \text{ ή } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \rightarrow \text{συμβολισμοί Leibniz}$$

Σχόλια:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν **υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και είναι ίσα.}$$

- Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι: $v(t_0) = S'(t_0)$
(Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε $v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν κινείται προς τα αριστερά, τότε $v(t_0) \leq 0$)
- Η **στιγμιαία επιτάχυνση** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης ταχύτητας $v(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι: $a(t_0) = v'(t_0)$
(Όταν ένα κινητό επιταχύνει, τότε $a(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν επιβραδύνει, τότε $a(t_0) \leq 0$)

❖ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(2018)

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$ έχουμε: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ = f'(x_0) \cdot 0 = 0, \text{ αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0.$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

Χρήσιμες Προτάσεις:

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι απαραίτητα και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

♦ Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο A ;

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

♦ Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

♦ Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \ \& \ \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$

♦ Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πρώτη, τι δεύτερη και τι νιοστή παράγωγο της f ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' .

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** , με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)} \right]', \quad \nu \geq 3$$

❖ Να αποδείξετε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(c)' = 0$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$.

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(x)' = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$.

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}.$$

Επομένως,
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu \cdot x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$.

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Επομένως,
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Χρήσιμες Προτάσεις:

- Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.
- Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(e^x)' = e^x$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

❖ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

❖ Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

για κάθε $x \in \Delta$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' &= [(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x). \end{aligned}$$

❖ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Απόδειξη:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$,

σύμφωνα με το θεώρημα: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ έχουμε:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^\nu - 1 \cdot (x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$.

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

Σύνθετη Παραγωγήση – Κανόνας της Αλυσίδας

Αν μία συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ για κάθε $x > 0$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ η $f(x) = x^\alpha$ είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

❖ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Απόδειξη:

Πράγματι

- αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

- αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

• $(c)' = 0$ • $(x)' = 1$ • $(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ○ $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ ○ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x > 0$ • $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$ • $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$	• $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$ • $(\sigma \upsilon \nu x)' = -\eta \mu x$ • $(\epsilon \phi x)' = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$, $x \neq \kappa \pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ • $(\sigma \phi x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $x \neq \kappa \pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ • $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$ • $(e^x)' = e^x$ • $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$
--	---

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

♦ Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

Απάντηση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Παρατήρηση: Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 .

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

<u>Εφαπτομένη σε σημείο</u>	<u>Κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο</u>	<u>Κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία</u>
Η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη της C_f στο x_0 , αν και μόνο αν:	Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f, D_g$ τέτοιο ώστε:	Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία με τετμημένη α και β αντίστοιχα, αν και μόνο αν υπάρχουν $\alpha \in D_f$ και $\beta \in D_g$ τέτοια ώστε:
$\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$	$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$

♦ Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x και y , τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 .
Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση:

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια:

- Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης S ενός κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $S'(t_0)$, της τετμημένης S ενός κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $S'(t_0)$ λέγεται **ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $v(t_0)$. Είναι δηλαδή $v(t_0) = S'(t_0)$
- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$
- Η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος** στο x_0 .
- Η παράγωγος $E'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης E ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακή είσπραξη** στο x_0 .
- Η παράγωγος $P'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κέρδους P ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κέρδος** στο x_0 .

Θεώρημα Rolle:

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
 παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ } τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$
 τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

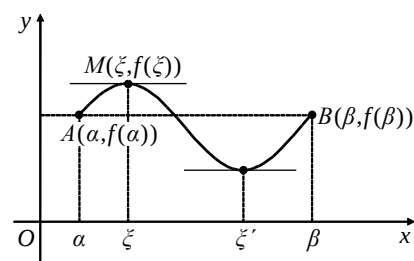
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της συνάρτησης f' στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Δηλαδή, η $C_{f'}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Δηλαδή, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ. Rolle:

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.



Παρατήρηση: Το θεώρημα Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Θεώρημα Μέσης Τιμής:

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) } τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$
 τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

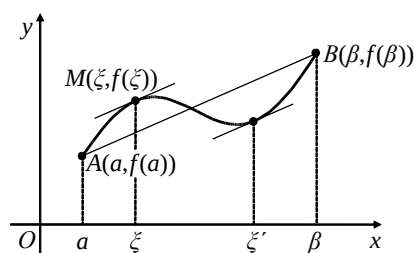
Δηλαδή, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη της ευθείας AB ($A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$).

(2016, Επαναλ. 2019)

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ. Μέσης Τιμής:

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη της ευθείας AB.

(2016, Επαναλ. 2019)



Συνέπεια (1^η) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής:

Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ } $\xrightarrow{\text{τότε}}$ η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος

μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει: $f'(\xi) = 0$, οπότε,

λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Συνέπεια (2^η) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής:

Αν οι f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ } $\xrightarrow{\text{τότε}}$ υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

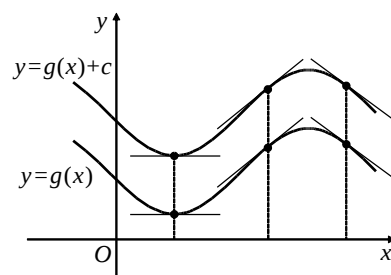
Απόδειξη:

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ .

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



Προσοχή: Οι παραπάνω συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Χρήσιμες Σχέσεις:

- $f'(x) + g'(x) \cdot f(x) = \dots \Leftrightarrow e^{g(x)} \cdot f'(x) + e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot f(x) = e^{g(x)} \cdot \dots \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{g(x)})' = (\dots)'$
- $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$ (βασιική εφαρμογή)

❖ Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
 Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(2017, 2019)

Απόδειξη:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Παρατήρηση: Όμοια, αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Σχόλια:

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα) στο Δ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αρνητική αντίστοιχα) στο εσωτερικό του Δ .
- Αν $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) στο Δ και η f' **μηδενίζεται σε μεμονωμένα σημεία** του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα) στο Δ .
- Αν $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) στο Δ και η f' **δεν ορίζεται σε μεμονωμένα σημεία** του Δ , **αλλά η f είναι συνεχής σ' αυτά**, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα) στο Δ .

♦ Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό μέγιστο**;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .

♦ Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό ελάχιστο**;

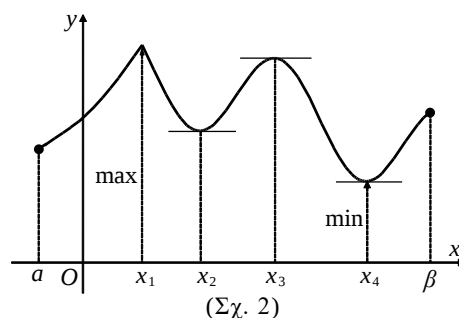
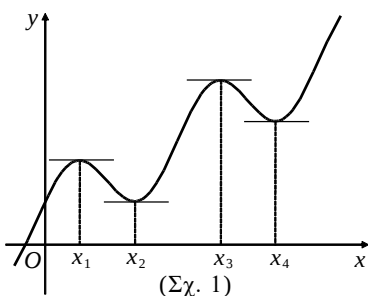
Απάντηση:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

Σχόλια:

- Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$ αντίστοιχα) ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά, **μέγιστο** (ολικό ελάχιστο ή απλά, **ελάχιστο** αντίστοιχα) το $f(x_0)$.
- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.
- Ένα **τοπικό μέγιστο** μπορεί να είναι **μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο**, όπως και ένα **τοπικό ελάχιστο** μπορεί να είναι **μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο** (Σχ. 1).
- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το **μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα**, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το **μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα** (Σχ. 2). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης **δεν είναι πάντοτε μέγιστο** αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης **δεν είναι πάντοτε ελάχιστο** αυτής (Σχ. 1).



❖ Θεώρημα Fermat:

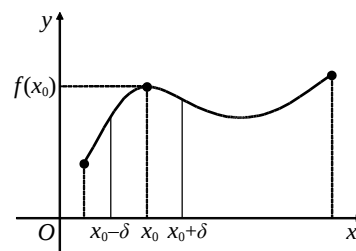
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό x_0 και
είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

$$\left. \begin{array}{l} \text{τότε} \end{array} \right\} \rightarrow f'(x_0) = 0$$

(Επαναλ. 2016, Επαναλ. 2017, 2019 – Διατύπωση)

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

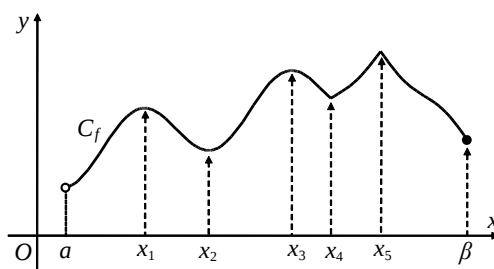
Σχόλιο: Σύμφωνα με το Θ. Fermat, τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

♦ Θεωρούμε μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f στο Δ ;

Απάντηση:

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, οι **πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται (x_1, x_2, x_3)
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται (x_4, x_5)
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της) (β)



Σχόλιο: Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η f' είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

❖ **Κριτήριο Τοπικών Ακροτάτων:**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπ. μέγιστο της f
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπ. ελάχιστο της f
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

(i) 2016, Επαναλ. 2019 iii) Επαναλ. 2018)

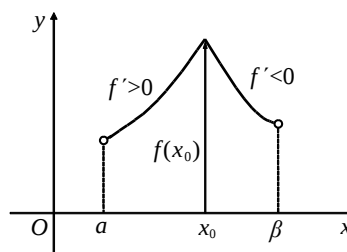
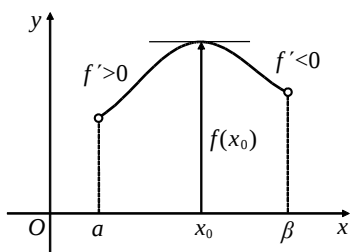
Απόδειξη:

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \quad (2)$$

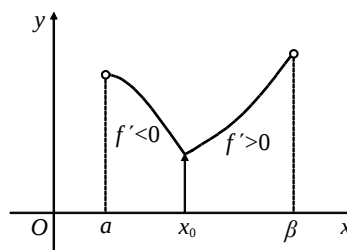
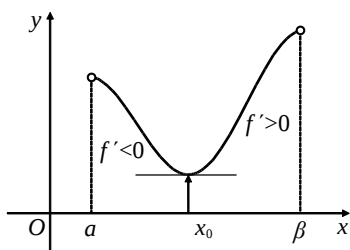


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

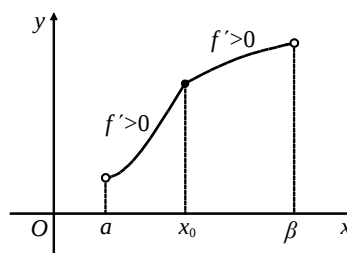
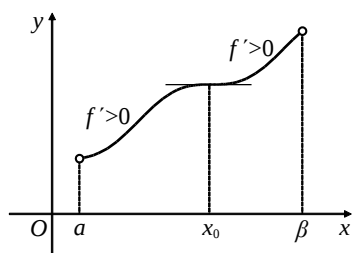
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

- ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$ τότε όπως είδαμε θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Σχόλιο: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, θα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

Για την εύρεση του μέγιστου και του ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f και υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά, καθώς και στα άκρα των διαστημάτων. Από όλες τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

Χρήσιμες Σχέσεις:

- Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$ (η ισότητα ισχύει για $x = 1$) (βασική εφαρμογή)
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$ (η ισότητα ισχύει για $x = 0$)^{*}

♦ Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (δηλ. είναι κυρτή) και πότε στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (δηλ. είναι κοίλη) στο Δ ;

Απάντηση:

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

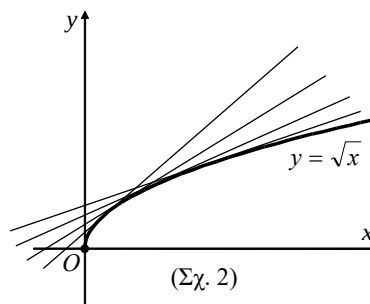
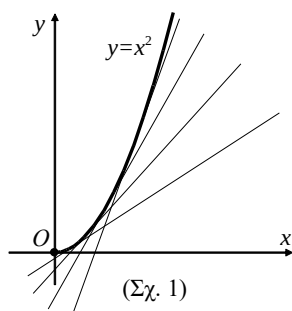
Σχόλια:

- Αν μια συνάρτηση είναι **κυρτή** σ' ένα διάστημα Δ , τότε η **εφαπτομένη** της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **κάτω από τη C_f** , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους (Σχ.1).

Δηλαδή, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (η ισότητα ισχύει για $x = x_0$)

- Αν μια συνάρτηση είναι **κοίλη** σ' ένα διάστημα Δ , τότε η **εφαπτομένη** της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **πάνω από τη C_f** , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους (Σχ.2).

Δηλαδή, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (η ισότητα ισχύει για $x = x_0$)



Χρήσιμο Θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Σχόλιο: Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι κυρτή (κοίλη αντίστοιχα) στο Δ , η f'' **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αρνητική αντίστοιχα) στο εσωτερικό του Δ .

♦ Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f** ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμψής** της γραφικής παράστασης της f .

Σχόλια:

- Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της C_f , τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμψής**.
- Στα σημεία καμψής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.

Χρήσιμο Θεώρημα:

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

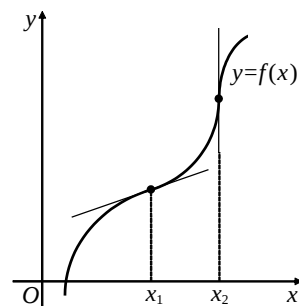
Σχόλιο: Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν, **δεν είναι θέσεις σημείων καμψής**.

♦ Θεωρούμε μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των σημείων καμψής της f στο Δ ;

Απάντηση:

Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, οι **πιθανές θέσεις των σημείων καμψής** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται (x_1)
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' (x_2)



Κριτήριο Σημείων Καμπής:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και $\left. \begin{array}{l} \text{ορίζεται εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A(x_0, f(x_0)) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{τότε}} \begin{array}{l} \text{το } A(x_0, f(x_0)) \text{ είναι} \\ \text{σημείο καμπής.} \end{array}$

Παρατήρηση: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε:

- f κυρτή στο $\Delta \Leftrightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ
- f κοίλη στο $\Delta \Leftrightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

♦ Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$

λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

Σχόλιο: Κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στα άκρα των ανοικτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της και στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

♦ Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Επαναλ. 2016)

Απάντηση:

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ αντίστοιχα), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (στο $-\infty$ αντίστοιχα).

♦ Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (στο $-\infty$ αντίστοιχα) αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ αντίστοιχα).

Σχόλιο: Οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στο $+\infty$ ($-\infty$ αντίστοιχα), εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ($(-\infty, \alpha)$ αντίστοιχα).

Χρήσιμο Θεώρημα:

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (στο $-\infty$ αντίστοιχα) αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$
 $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} \text{ αντίστοιχα} \right).$

Σχόλια:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 **δεν έχουν ασύμπτωτες**.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, **δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες**.
- Αν η C_f **έχει οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ (στο $-\infty$ αντίστοιχα), τότε για τη C_f **δεν αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ (στο $-\infty$ αντίστοιχα). **Ισχύει και το αντίστροφο**.
- Κάθε C_f μπορεί να έχει **το πολύ μία πλάγια - οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ και **το πολύ μία πλάγια - οριζόντια ασύμπτωτη** στο $-\infty$.
- Μία C_f μπορεί να έχει **άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες** (π.χ. $f(x) = \varepsilon \varphi(x)$).
- Αν η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι **πλάγια - οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η ε μπορεί να την **τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία**.
- Αν η ευθεία $\varepsilon: x = x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f , τότε η ε μπορεί να έχει **το πολύ ένα κοινό σημείο** με τη C_f .

Κανόνας De L' Hospital:

(Μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) $\left\{ \begin{array}{l} \text{τότε} \end{array} \right. \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο) $\left\{ \begin{array}{l} \text{τότε} \end{array} \right. \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Σχόλια:

- Ο κανόνας De L' Hospital ισχύει και για τις μορφές: $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$
- Ο κανόνας De L' Hospital ισχύει και για **πλευρικά όρια** και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τον εφαρμόσουμε **περισσότερες φορές**, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

Οδηγός για Μελέτη μιας Συνάρτησης:

- Βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της f .
- Εξετάζουμε τη **συνέχεια** της f στο πεδίο ορισμού της.
- Βρίσκουμε τις **παραγώγους** f' και f'' και κατασκευάζουμε τους **πίνακες των προσήμων** τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα **διαστήματα μονοτονίας** και τα **τοπικά ακρότατα** της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι **κυρτή** ή **κοίλη** και βρίσκουμε τα **σημεία καμπής**.
- Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (**οριακές τιμές, ασύμπτωτες** κτλ.)
- Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών** της f και με τη βοήθειά του χαράζουμε τη **γραφική παράσταση** της f . Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

Σχόλια:

- Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T .

Γ. Ολοκληρωτικός Λογισμός

- ♦ Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια συνάρτηση λέγεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ ;

(Επαναλ. 2019)

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Χρήσιμες Προτάσεις:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , τότε έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε δεν είναι απαραίτητα και συνεχής στο διάστημα αυτό.
- Αν μια συνάρτηση δεν έχει παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

- ❖ Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσα της f στο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- κάθε άλλη παράγουσα της G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ .
Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν: $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$,
οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

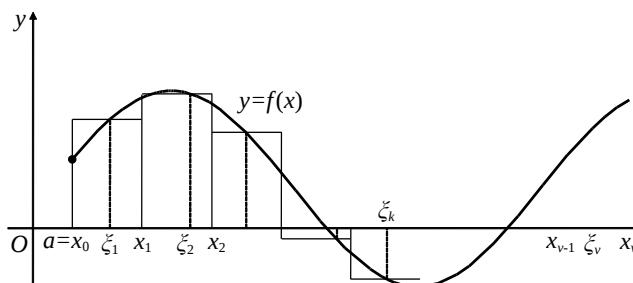
Παρατήρηση: Η έννοια της αρχικής – παράγουσας συνάρτησης ορίζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

♦ Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Τι λέγεται ορισμένο ολοκλήρωμα της f ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$

χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$ (άθροισμα Riemann).

Αποδεικνύεται ότι, "το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$ (1)

υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β ".

$$\text{Δηλαδή, } \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)}$$

Σχόλια:

- Το σύμβολο $\int$ ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης και οφείλεται στον Leibniz.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** ολοκλήρωσης.
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι **πραγματικός** αριθμός.
- Στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με **οποιοδήποτε άλλο γράμμα**. Επομένως, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ κ.ο.κ.
- Ισχύουν: $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε είναι **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα αυτό.

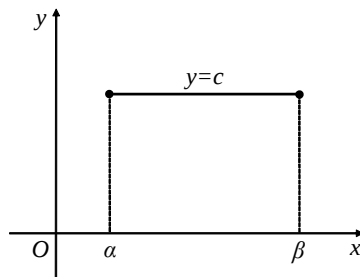
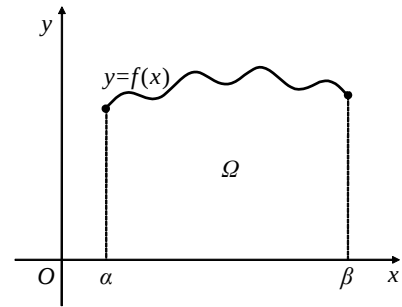
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ δίνει το **εμβαδόν** $E(\Omega)$ του **χωρίου** Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Δηλαδή,
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega)$$

Επομένως,

αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

- $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$, $c \in \mathbb{R}$ (**βασική εφαρμογή**)
- Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το **εμβαδόν** ενός **ορθογωνίου** με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .



Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος:

1. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε:
 - α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
 - β. $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
 - γ. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
2. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$
3. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:
 - α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ (η ισότητα ισχύει όταν η f είναι μηδενική στο $[\alpha, \beta]$)
 - β. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$
4. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:
 - α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ (η ισότητα ισχύει όταν οι f και g είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$)^{xi}
 - β. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$, αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παντού ίσες στο $[\alpha, \beta]$ ^{xii}

Χρήσιμο Θεώρημα:

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ .

Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

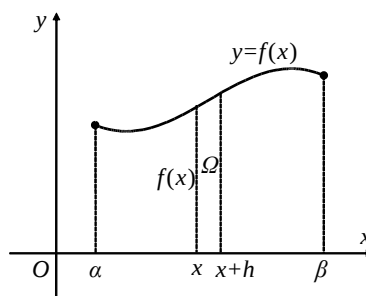
Γεωμετρική Ερμηνεία:

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \\ &\approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0. \end{aligned}$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$,

οπότε
$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



Παρατήρηση: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

❖ Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

(2018 - διατύπωση)

Απόδειξη:

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$ (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Συμβολισμός: Η διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ συμβολίζεται με $[G(x)]_\alpha^\beta$, οπότε η ισότητα του

παραπάνω θεωρήματος γράφεται:
$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = [G(x)]_\alpha^\beta$$

Τύποι – Μέθοδοι Ολοκλήρωσης:

(Κατά παράγοντες)

$$\int_\alpha^\beta f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x) g(x) dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

(Αλλαγή μεταβλητής)

$$\int_\alpha^\beta f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$

Χρήσιμες Σχέσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, τότε:

α. $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 0$, αν η f είναι περιττή. ^{xiii}

β. $\int_{-\alpha}^\alpha f(x) dx = 2 \int_0^\alpha f(x) dx$, αν η f είναι άρτια. ^{xiv}

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

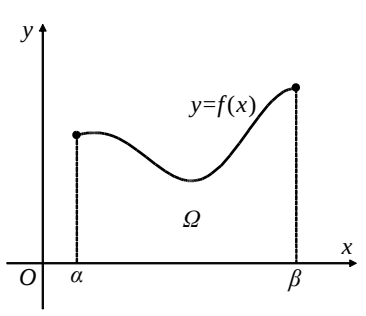
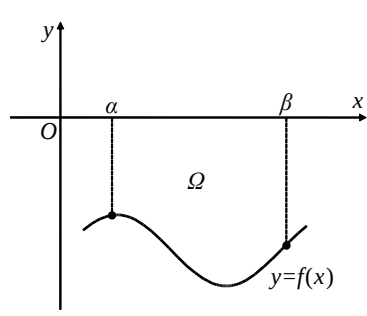
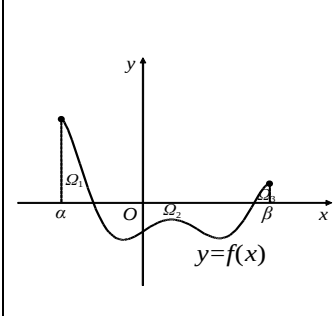
$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, x \in [\alpha, \beta] \text{ ^{xv}}$$

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε:

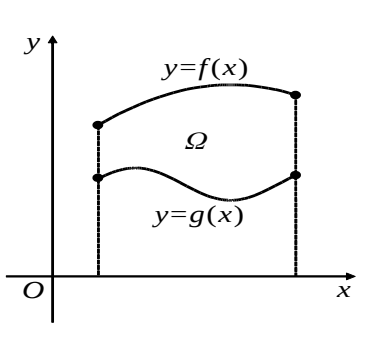
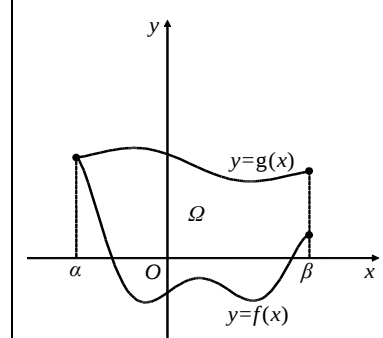
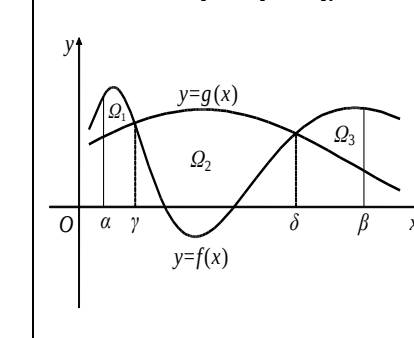
$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0 \Rightarrow \alpha = \beta, \alpha, \beta \in \Delta \text{ ^{xvi}}$$

Εμβαδά Επίπεδων Χωρίων

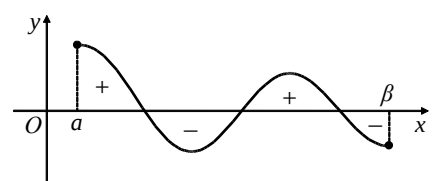
➤ Όταν περικλείονται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:		
$f(x) \geq 0$  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$	$f(x) \leq 0$  $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$	η $f(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

➤ Όταν περικλείονται από τη C_f , τη C_g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:		
$f(x) \geq g(x)$  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$	$f(x) \leq g(x)$  $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$	η $f(x) - g(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο  $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx$

Σχόλιο: Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.



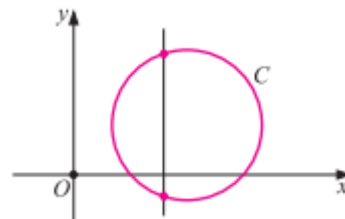
Λανθασμένες Προτάσεις με Αντιπαράδειγματα

1. Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Αντιπαράδειγμα:

Στον κύκλο υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κατακόρυφη ευθεία που έχει με τη γραφική παράσταση του κύκλου περισσότερα από ένα κοινό σημείο.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

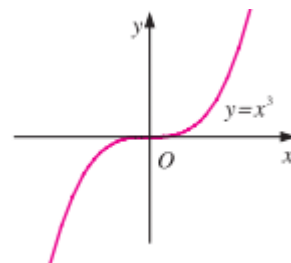


2. Κάθε συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.

Αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



3. Κάθε συνάρτηση f που είναι "1-1" σε ένα διάστημα Δ , είναι και γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

(2018)

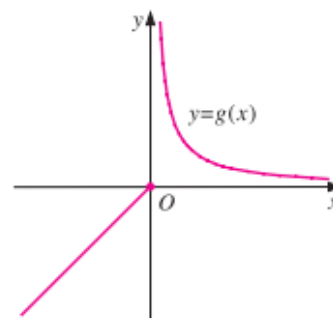
Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι "1-1", αφού κάθε παράλληλη ευθεία στον άξονα $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα το πολύ κοινό σημείο.

Εντούτοις, η f δεν είναι γνησίως μονότονη, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

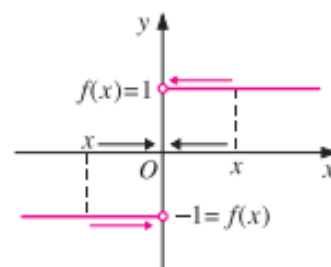


4. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη αρκούντως κοντά στο x_0 , υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, ενώ



για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

5. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 εξαρτάται από τα άκρα α και β των παραπάνω διαστημάτων.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης

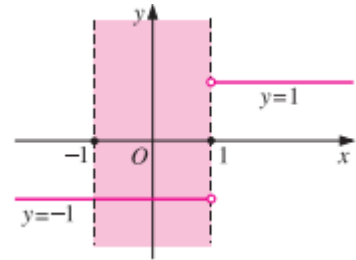
$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$ και περιοριζόμαστε στο υποσύνολο

$(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο παίρνει τη

μορφή $f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

Άρα, το όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



6. Υπάρχει στο μηδέν το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

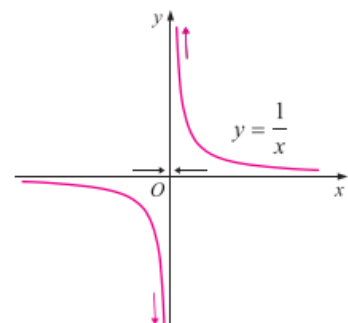
Αντιπαράδειγμα:

Για $\nu = 0$ η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \frac{1}{x}$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



7. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$

(Επαναλ. 2018)

Αντιπαράδειγμα:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, ενώ

$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

8. Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(2019)

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

Το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$

Εντούτοις, η τιμή της f στο $x_0 = 1$ είναι $f(1) = 3$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

9. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[\alpha, \beta]$.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω μια συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του διπλανού σχήματος.

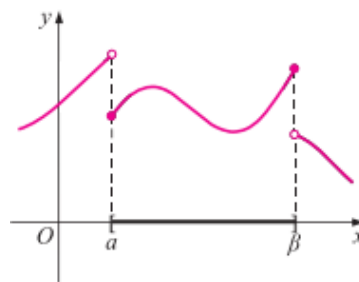
Όπως είναι φανερό, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Εντούτοις, η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = \alpha$, αφού δεν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$), ούτε στο $x_2 = \beta$, αφού δεν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$)

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



10. Εφαπτομένη οποιασδήποτε καμπύλης σε ένα σημείο της A , ονομάζεται η ευθεία η οποία έχει με την καμπύλη ένα μόνο κοινό σημείο, το A .

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$

Η ευθεία ζ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα μόνο κοινό σημείο, το A .

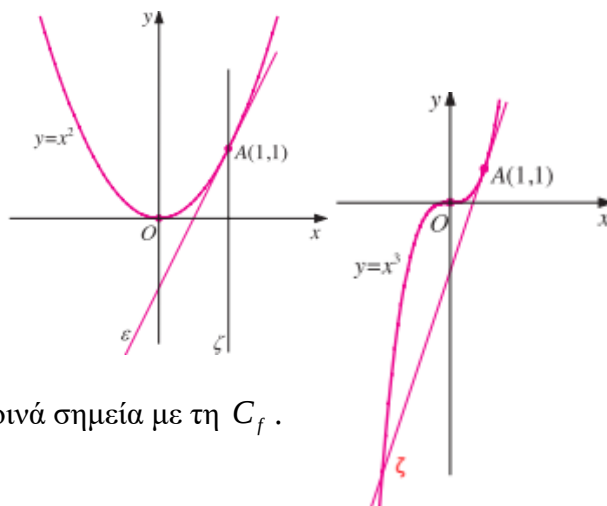
Παρά το γεγονός αυτό, η ευθεία ζ δεν αποτελεί εφαπτομένη της C_f , αφού πραγματική εφαπτομένη της είναι η ευθεία ϵ .

Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = x^3$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A είναι η ευθεία ζ .

Εντούτοις, παρατηρούμε ότι η ευθεία ζ έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f .

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



11. Κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ 5x, & x \geq 0 \end{cases}$

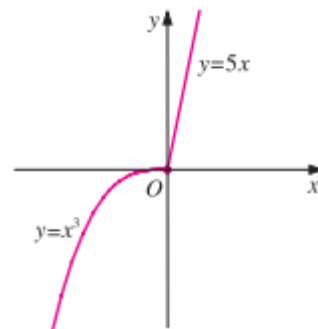
Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 = 5$$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αφού δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



12. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(2017)

Αντιπαράδειγμα:

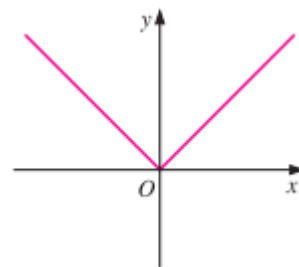
Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



13. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα A .

(2019)

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

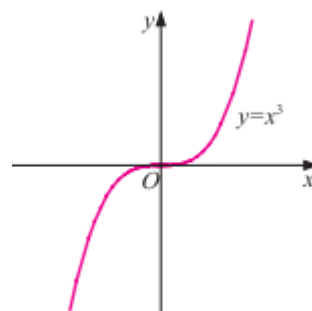
14. Για κάθε συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$

Παρατηρούμε ότι, αν και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις η παράγωγός της $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



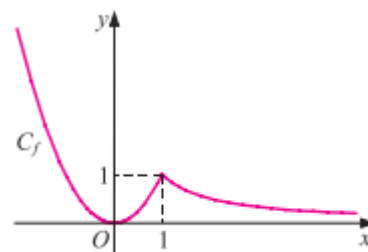
15. Κάθε συνάρτηση που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, παρουσιάζει και (ολικό) μέγιστο.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



16. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης αυτής.

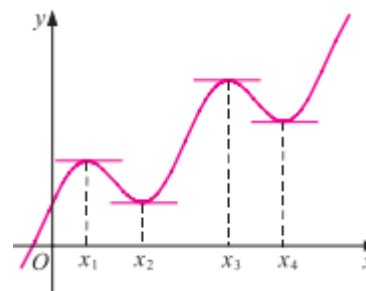
Αντιπαράδειγμα:

Έστω μια συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του διπλανού σχήματος.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο και στο x_4 τοπικό ελάχιστο.

Εντούτοις, το τοπικό μέγιστο $f(x_1)$ είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο $f(x_4)$.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

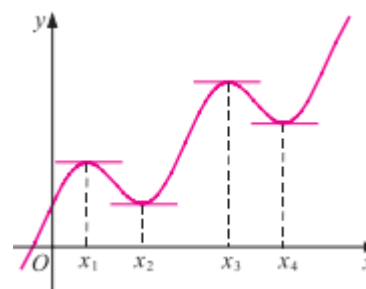


17. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το (ολικό) μέγιστο της συνάρτησης αυτής.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω μια συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του διπλανού σχήματος.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_1 και στο x_3 τοπικά μέγιστα.



Όπως είναι φανερό, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα ($f(x_3)$) δεν αποτελεί το (ολικό) μέγιστο της συνάρτησης, αφού η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει μέγιστο. Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

18. Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης αυτής.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2(x-2), & x > 1 \end{cases}$$

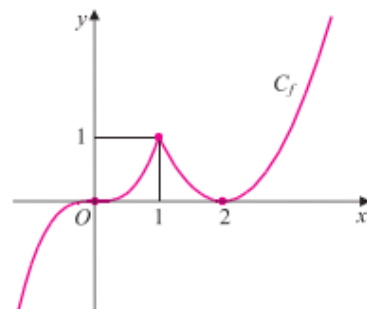
Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι 0 και 2

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2.

Εντούτοις

, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



19. Οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης είναι ικανές για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής.

Αντιπαράδειγμα:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και

$$g(x) = \sqrt{|x|}$$

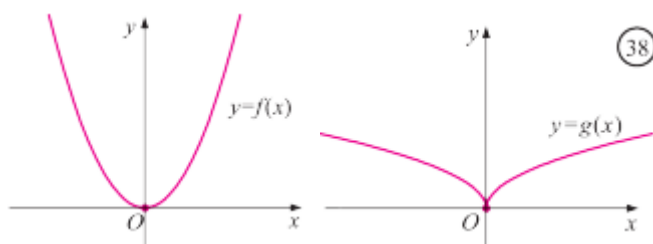
Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά κάθε μιας από τις δύο συναρτήσεις, είναι ίδιες.

Δηλαδή οι συναρτήσεις,

- είναι γνησίως φθίνουσες στο $(-\infty, 0]$
- είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το οποίο είναι ίσο με 0.

Εντούτοις, οι συναρτήσεις αυτές έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή "ανέρχονται" και "κατέρχονται" με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



20. Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα Δ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και κυρτή στο Δ , ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

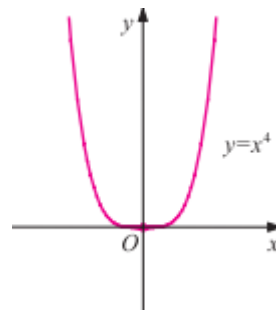
Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$

Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Εντούτοις, η δεύτερη παράγωγός της $f''(x) = 12x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$. Ισχύει όμως $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



21. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ μιας συνάρτησης f στα οποία η f'' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' είναι θέσεις σημείων καμπής της συνάρτησης αυτής.

(Επαναλ. 2017)

Αντιπαράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^4, & x \geq 1 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με

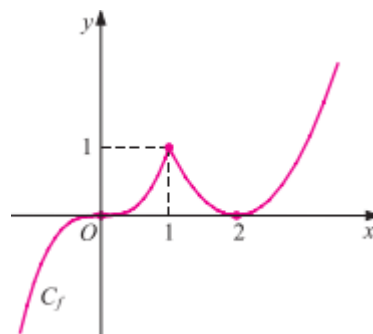
$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ 12(x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1

Εντούτοις, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής,

αφού σ'αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0,0)$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

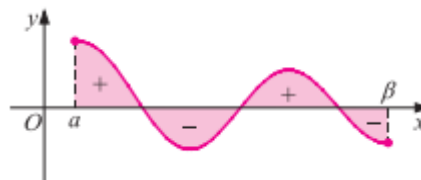


22. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ισούται πάντοτε με θετικό πραγματικό αριθμό.

Αντιπαράδειγμα:

Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. Συνεπώς μπορεί να ισούται με οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.



Επιπλέον Βασικές Προτάσεις

1. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια ώστε $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Τότε θα ισχύει $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 \geq y_2$ Άτοπο

Επομένως, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , ομοίως αποδεικνύεται ότι η f^{-1} είναι επίσης γνησίως φθίνουσα στο $f(\Delta)$.

- ii Θα αποδείξουμε ότι: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$, όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

'' $\Rightarrow$ '' Έστω ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

Επομένως,

$$f(\rho) = f^{-1}(\rho) \Rightarrow f(f(\rho)) = f(f^{-1}(\rho)) \Rightarrow f(f(\rho)) = \rho$$

Θα αποδείξουμε ότι ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$

Δηλαδή,

$$f(\rho) = \rho \quad (1)$$

Αν $f(\rho) < \rho \Rightarrow f(f(\rho)) < f(\rho) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho < f(\rho)$ Άτοπο

Αν $f(\rho) > \rho \Rightarrow f(f(\rho)) > f(\rho) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho > f(\rho)$ Άτοπο

Επομένως,

$$f(\rho) = \rho$$

'' $\Leftarrow$ '' Έστω ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$.

Επομένως,

$$f(\rho) = \rho \Rightarrow f^{-1}(f(\rho)) = f^{-1}(\rho) \Rightarrow \rho = f^{-1}(\rho) \Rightarrow f(\rho) = f^{-1}(\rho)$$

Δηλαδή, ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

- iii '' $\Rightarrow$ '' Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$

Για κάθε x κοντά στο x_0 , έχουμε:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Ομως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|f(x)|) = 0$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

'' $\Leftarrow$ '' Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Από ιδιότητα των ορίων, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |0| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

iv “ $\Rightarrow$ ” Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$

Για κάθε x κοντά στο x_0 , έχουμε:

$$-\sqrt{f^2(x)} = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\sqrt{f^2(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sqrt{f^2(x)} \right) = 0$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

“ $\Leftarrow$ ” Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Τότε, προφανώς θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$

v Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, έχουμε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και προφανώς $g(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Επομένως,

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{g(x)} > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$

κι αφού $g(x) > 0$, θα ισχύει τελικά $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

(Δεν απαιτείται απόδειξη)

vi Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε το v.

(Δεν απαιτείται απόδειξη)

vii Έχουμε,

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x^\nu} \right| \leq \left| \frac{1}{x^\nu} \right|, \text{ αφού } |\eta\mu x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως,

$$-\left| \frac{1}{x^\nu} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x^\nu} \leq \left| \frac{1}{x^\nu} \right|$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\left| \frac{1}{x^\nu} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x^\nu} \right| = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^\nu = \pm\infty$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^\nu} = 0$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^\nu} = 0$

viii Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{x}$ και ισχύει $u \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επομένως,

$$(1) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

ix Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$, όπου y τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Προφανώς ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x) = -\infty$. Άρα, υπάρχει x_1 "κοντά στο α^+ " τέτοιο, ώστε

$$g(x_1) < 0$$

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x) = +\infty$. Άρα, υπάρχει x_2 "κοντά στο β^- " τέτοιο, ώστε $g(x_2) > 0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq (\alpha, \beta)$.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y$ για κάθε πραγματικό αριθμό y .

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

(Δεν απαιτείται απόδειξη)

x Από εφαρμογή του βιβλίου γνωρίζουμε ότι

$$\ln x \leq x - 1, \quad x > 0 \quad (1) \quad (\text{η ισότητα ισχύει για } x = 1)$$

Θέτουμε στην (1) όπου x το e^x και παίρνουμε:

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

Η ισότητα ισχύει για $e^x = 1$, δηλαδή για $x = 0$

(Δεν απαιτείται απόδειξη)

xi Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έχουμε:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και $h(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx &\geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \end{aligned} \quad (\text{Δεν απαιτείται απόδειξη})$$

xii Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε το xi.

(Δεν απαιτείται απόδειξη)

xiii Αφού η συνάρτηση f είναι περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$ θα ισχύει:

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \quad (1)$$

Επομένως,

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-\alpha}^{\alpha} -f(-x) dx$$

Θέτουμε $u = -x \Rightarrow du = -dx$

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ και για $x = \alpha \Rightarrow u = -\alpha$

Συνεπώς,

$$I = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(u) du = - \int_{-\alpha}^{\alpha} f(u) du = -I$$

Τελικά,

$$I = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

xiv Αφού η συνάρτηση f είναι άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$ θα ισχύει:

$$f(-x) = f(x) \quad (1)$$

Επομένως,

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-\alpha}^0 f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^0 f(-x) dx$ θέτουμε $u = -x \Rightarrow du = -dx$

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 0$

Συνεπώς,

$$I = - \int_{\alpha}^0 f(u) du + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(u) du + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

xv Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$

Όμως η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Επομένως,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0 \quad \text{Άτοπο} \quad \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \right)$$

Συνεπώς,

$$f(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

xvi Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . Έστω $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

• Αν $\alpha < \beta$, τότε $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ Άτοπο $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \right)$

• Αν $\alpha > \beta$, τότε $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ Άτοπο $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \right)$

Επομένως, $\alpha = \beta$

Όμοια, αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.