Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο 2τ , $\tau > 0$ και $\widehat{AB\Gamma} = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

α. Να δείξετε ότι η πλευρά $(B\Gamma) = \alpha$ δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha = \frac{2\tau}{1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

β. Να βρείτε το $x \in \left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ για το οποίο η πλευρά α γίνεται ελάχιστη.

Έστω ότι η πλευρά α είναι σταθερή και ίση με 10 μονάδες μήκους.

Επίσης να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο: $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$.

γ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = 25\,\eta\mu 2x \ , x \in \left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$$

δ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ε. Να δείξετε ότι

$$\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} E(x)\,dx < \frac{3\pi^2}{4}$$

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = lnx - e^{2x}$

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και ότι ο ημιάξονας Oy' είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f'(2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = f'(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x)$

ε. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_1 = 1$ και για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι

$$e^{2x} \geq lnx - (1 - 2e^2)x - e^2 + 1$$

στ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

και ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω επίσης η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g^3(x) - 2f(x) \cdot g(x) = 2e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

γ. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι $f(\eta\mu x) > f(x \cdot \sigma\upsilon\nu x)$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 1$.

ε. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$.

α. i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β. i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq -2$ ισχύει $x \cdot e^{x+2} + x + 4 \geq 0$.

γ. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

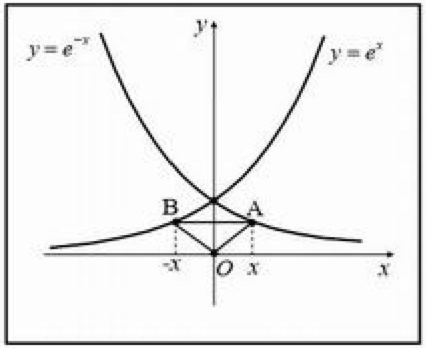
δ. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $\alpha \cdot e^{-x} = x$.

ε. i) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία

$x = 1$.

ii) Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, καθώς επίσης και τα σημεία $A(x\,, g(x))$ και $B(-x\,, f(-x))$ με $x > 0$.



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = x \cdot e^{-x}\,, x > 0$$

β. Να βρείτε το $x \in (0\,, +\infty)$ για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γίνεται μέγιστο.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης E του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ

δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^x = \frac{x}{\alpha}\,, x > 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

ε. Να δείξετε ότι

$$\int_1^e \frac{x}{e^x}\,dx < 1 - \frac{1}{e}$$

στ. Σημείο $M(\alpha\,, \beta)$ με $\alpha > 0$ κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης Ε του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ και η τεταγμένη του μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{e}$ εκατοστά το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 2$ εκατοστά.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, $f(0) = 1$ και

$$f'(x) \cdot f^2(x) \cdot (x^3 + 2x + 1) + \frac{1}{3} f^3(x) \cdot (3x^2 + 2) = 0$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{3}}$ $x \geq 0$

γ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f.

δ. Να δείξετε ότι $f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ε. Να δείξετε ότι $\int_1^{e^2} f(x)\,dx < 2$

στ. Αν $\int_1^2 f(x)\,dx < \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y = 1$, $x = 1$ και $x = \alpha$ να είναι ίσο με $\int_1^{\alpha} f(x)\,dx$.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{x^2}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται μοναδική εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $(\delta): y = -\frac{1}{2e}x + 2023$, την οποία και να βρείτε.

δ. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)\,dx > 2e$

ε. i) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0\,,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3x_0$

ii) Να δείξετε ότι $0 < x_0 < \frac{1}{4-e}$

στ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\,f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

δ. i) Να δείξετε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

ii) Να δείξετε ότι $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$.

ε. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

στ. Θεωρούμε τα σημεία $A(x\,,f(x))$ και $B(-x\,,f(-x))$, $x>0$, της γραφικής παράστασης της f και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τα σημεία Γ και Δ να βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν τού ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(x)=2x\cdot e^{-x^2}$, $x>0$.

ii) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1} E(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}-\frac{1}{e}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \lambda \cdot lnx - 2\sqrt{x} \ , \lambda > 0$$

α. Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο, το οποίο να βρείτε.

β. Να βρείτε το λ ώστε η μέγιστη τιμή της f να πάρει την ελάχιστη τιμή της.

Έστω $\lambda = 1$.

γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη, την οποία να βρείτε.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (1\,, e)$, τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) > 2\sqrt{e}$$

ε. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

στ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

β. Να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο αυτό.

γ. i) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = \frac{9}{4}x$, $x = 0$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 0$. Κατόπιν να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} E(\lambda)$

ε. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\frac{e^{2\sigma\upsilon\nu^2 x}}{e^{2\sigma\upsilon\nu^2 x}+1} - \frac{e^{1-\sigma\upsilon\nu x}}{e^{1-\sigma\upsilon\nu x}+1} = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x$$

α. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) > 0$.

β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = lnx \ \ , x > 0$. Να ορίσετε τη συνάρτηση

$$h = g \circ f$$

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρούμε ότι

$$h(x) = ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right), x \in \mathbb{R}$$

γ. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ. Να δείξετε ότι h αντιστρέφεται και ότι η h^{-1} έχει τύπο

$$h^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x - 1}{2e^x} \ \ , x \in \mathbb{R}$$

ε. Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(x^2 - 2x) = h^{-1}(2e^x - 2)\ , x \in \mathbb{R}$

στ. i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h^{-1} στο $x_0 = 0$.

ii) Για κάθε $x \geq 0$ να δείξετε ότι $e^{2x} - 2e^x - 1 \geq 2(x - 1)e^x$

Έστω συνάρτηση $f\colon (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$x^2 f'(x) + f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ **για κάθε** $x > 0$ **και** $f(1) = 0$

α. Να δείξετε ότι

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot lnx \ , x > 0$$

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ. Για κάθε $x > 1$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi > 1$ για το οποίο ισχύει:

$$f(x) = (x-1)f'(\xi)$$

Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

δ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-1} \ , x \in (1\,,+\infty)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

ε. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ και να δείξετε ότι:

$$(x-1)e^{\frac{x-1}{x}} \geq lnx$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x^2+1) - 3x \ , x \in \mathbb{R}$.

α. i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να λύσετε στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$f^{-1}(3\varepsilon\varphi x) = f^{-1}(2\sqrt{3}\eta\mu x)$$

γ. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f^{-1} είναι κοίλη στο διάστημα $[-1, 1]$, να δείξετε ότι:

i) η εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x$.

ii) $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx < 0$.

δ. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right) < 3x(x-1)$$

ε. i) Να αποδείξετε ότι $\ell = \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}}\right) = 1$.

ii) Σημείο $M(x, y)$ κινείται επάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $A(\ell, f(\ell))$, μειώνεται με

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

και ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω επίσης η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g^3(x) - 2f(x) \cdot g(x) = 2e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

γ. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι $f(\eta\mu x) > f(x \cdot \sigma\upsilon\nu x)$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 1$.

ε. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(e) = 1$, για τη οποία ισχύουν:

$$x \cdot f'(x) + f^2(x) = 0 \;\; \text{και} \;\; f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = lnx - \frac{1}{f(x)}$$

είναι σταθερή στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β. Να δείξετε ότι

$$f(x) = \frac{1}{lnx} \;\; , x > 1$$

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\varphi x}$$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και έχει τύπο

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x}} \;, x > 0$$

ε. Ένα σημείο $M\left(\alpha, f^{-1}(\alpha)\right)$ με $\alpha > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή t αυξάνεται με ρυθμό $\frac{1}{e}$ cm/sec. Η εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $\alpha(t_0) = 1$ cm:

i) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A.

ii) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$.

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\lambda\cdot lnx-2\sqrt{x}\ ,\lambda>0$$

α. Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο, το οποίο να βρείτε.

β. Να βρείτε το λ ώστε η μέγιστη τιμή της f να πάρει την ελάχιστη τιμή της.

Έστω $\lambda=1$.

γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη, την οποία να βρείτε.

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(1\,,e)$, τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)>2\sqrt{e}$$

ε. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

στ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

δ. i) Να δείξετε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

ii) Να δείξετε ότι $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$.

ε. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

στ. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(-x, f(-x))$, $x > 0$, της γραφικής παράστασης της f και σχηματίζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τα σημεία Γ και Δ να βρίσκονται στον άξονα $x'x$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν τού ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x \cdot e^{-x^2}, x > 0$.

ii) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1} E(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} - \frac{1}{e}$.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x \le 1 \\ 2\ell nx+\dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

Δ2. α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = x$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και την διαπερνά.

β) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{x \cdot \ell nx}{f\left(x^2\right)}\,dx > 2$.

Δ3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot f\left(\eta\mu^2 x\right)$.

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0>2$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2$.

β) Έστω συνάρτηση $g:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=x_0 \cdot f(x)-2x \cdot \ell nx_0$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει μέγιστο το 1.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\leq 0 \\ \lambda\cdot ημx, & 0<x\leq \pi \end{cases}$,

όπου λ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$.

Γ3. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(-\infty,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο,ώστε $F(x_0)=F(0)+3$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{x_0} f(x)\,dx$.

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$,με $\alpha<0$ κινείται στην C_f.Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=\frac{\alpha(t)}{2}$.

Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ,την χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του γίνεται ελάχιστος.

Δίνεται συνάρτηση $f:R \to R$, με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$.

Γ. Να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1}.

Δ. Να λύσετε στο R την εξίσωση: $f(\eta\mu x)+\eta\mu x=2$.

ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\ell nx$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Β) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $e^{2x}+x\cdot e^{x}=1$.

Γ) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$f(\alpha)+f(\beta)>0\Leftrightarrow f(\alpha\cdot\beta)>0.$$

Δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(2x^2-2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$.

Μέχρι και τα θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + \ell nx = 0$, έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(0,1)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x + \alpha, & 0 \le x < x_0 \\ x + \ell nx, & x \ge x_0 \end{cases}, \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Γ) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $g:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = f^2(x) + 2f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$.

Δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$, η εξίσωση:

$x_0 \cdot e^x + x + \ell nx_0 = \eta\mu\varphi$, έχει μοναδική ρίζα στο $[0,x_0]$.

Μέχρι και τα θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\left|f(x)-e^x\right| = \left|x+e^x\right|, x \in \mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+e^x=0$, έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο $(-1,0)$.

Β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+2e^x, x \in \mathbb{R}$.

Γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{\left(x_0+1\right)^{f(x)}}$.

Δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \left(x_0, 0\right]$, υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(x_0, 0\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{e^{x_0}+f(\alpha)}{2}$.

Μέχρι και κανόνες παραγώγισης

Δίνεται παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{1}{x} - \ell nx\right) = x$, για κάθε $x > 0$.

A) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$ και στη συνέχεια ότι

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - \ell nx, x > 0$.

B) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f', τέμνει τον άξονα $x'x$.

Γ) Να λύσετε στο διάστημα $(0,\pi)$ την εξίσωση: $f(x + \ell nx) = \frac{\eta\mu x}{x}$.

Δ) Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2 - 3x + 4$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g \circ f$, έχουν μοναδικό κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μέχρι και τους ρυθμούς μεταβολής

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha, & x \le 1 \\ 3x^2+\beta x, & x>1 \end{cases}$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι υπάρχει

το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+f(0)\cdot x\right)$ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε:

A.i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=-3$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

B. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $K(0,-3)$ διέρχεται ακριβώς μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία εκτός από το σημείο επαφής, έχει ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο με την C_f.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(f\left(\dfrac{1}{(x-1)^{2024}}\right)\cdot f^{2024}(x)\right)$.

Δ. Ένα υλικό σημείο $M(x,f(x))$ ξεκινά από το σημείο $N(-5,f(-5))$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\psi=f(x)$, με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης τους, είναι 27 φορές μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης τους.

Μέχρι και τα θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x-e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0 \\ \ell n(x+\alpha)+x+\alpha, & x\geq 0 \end{cases}, \text{όπου } \alpha>0.$$

Α.Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0,

όπου $x_0 \in (-1,0)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα,να θεωρήσετε ότι x_0 είναι ο αριθμός που αναφέρεται στο Β.

Γ.Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x)+2x_0 \cdot f(x)+x_0 \cdot \ell n(x_0+1)>0$.

Δ.Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+\lambda x)=f(\mu x_0)$, να βρείτε τους $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Μέχρι και ρυθμούς μεταβολής

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x + 1, \alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία ισχύουν:

- Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ.Bolzano στο $[0,1]$
- Η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $N(0,-1)$,σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $N(0,-1)$,έχει εξίσωση $\psi = -x - 1$.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \lambda e^{x-1} - 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Β)Αν γνωρίζετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = -x - 1$ εφάπτεται και στη C_g, να βρείτε τον αριθμό λ .

Γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{f(x)-1} - 1}{f(x+1) + 2}$.

Δ) Ένα υλικό σημείο $M(x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\psi = f(x)$,με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) < 0$.Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης,οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι αντίθετοι.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2}, x<0 \\ \alpha, \quad x=0, \alpha \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}, x>0 \end{cases}$

- Η ευθεία με εξίσωση $\psi = x$,εφάπτεται στη C_f

Α.Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Β.Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}$.

Γ.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f(e^x) = 0$,έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Δ.Αν x_0 είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Γ,να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:$x^2 + 2e^x + 2x_0 \geq x_0^2$.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(x)} - f(-1)\cdot f(x) = e^x + x + 1, x \in \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα

β) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(\alpha)\cdot f(x) + x\right] = \beta$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$.

Στο παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

Δ. Έστω συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x_0) = 1$, για την οποία ισχύει $g(x) + \eta\mu f(x) \geq f(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης g.

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)$ με τύπο $f(x)=\ell n\left(\alpha\cdot e^{x}-\ell nx\right),\alpha>0$,

για την οποία γνωρίζετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi=x$,

είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β. Αν $x>0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x}=\dfrac{1}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0,

η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα

της εξίσωσης (1).

Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(x)\geq \ell n\left(e^{x_0}+x_0\right)$.

Δ. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $x_0\cdot e^{f(x)}=x_0{}^{2}+\lambda$, έχει μία το πολύ ρίζα στο $(0,+\infty)$

να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός λ.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x^2 + 3x - 2e^x$

και $g(x) = x^2 + x - 3$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) \leq 1$.

Δ2.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που έχει το μεγαλύτερο συντελεστή διεύθυνσης,διαπερνά τη C_f.

Δ3.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2

με $x_1 < 0 < x_2$,οι οποίες είναι και οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Στο παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1).

Δ4.Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g ,να αποδείξετε ότι:

α) $E = (x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2 + 1)$

*β) $f(E + x_1) < x_2 - 2$

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $(x-1)\cdot f^2(x) + f(x) + f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = (0,1]$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $x + \dfrac{1}{f(x)} = c \cdot e^x$

β) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$

Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$, με $F(0) = 0$.

Δ3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $F(x) \cdot \eta\mu^2 x = x$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 e^x \cdot F(\eta\mu x)\, dx < 1$.

Δίνεται συνάρτηση $\mathrm{f}:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f}(x) = x^2 - 2\ell n x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ2.α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 2$, τέμνει τη C_{f} σε δύο ακριβώς σημεία $\mathrm{A}(x_1,\mathrm{f}(x_1))$ και $\mathrm{B}(x_2,\mathrm{f}(x_2))$, με $x_1 < 1 < x_2$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η κλίση της εφαπτομένης της C_{f} στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi,\mathrm{f}(\xi))$, να είναι μικρότερη κατά 2 από την τεταγμένη του σημείου M.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι τα ξ, x_1, x_2 είναι αυτά που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(\xi)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} e^x \cdot \mathrm{f}(x+1)\, dx > 2\left(e^{x_2} - e^{x_1}\right)$.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με παράγωγο f' για την οποία ισχύει:

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1, & x > 1 \end{cases}$. Δίνεται ακόμη ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(e, f(e))$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \ell n x + x, & x > 1 \end{cases}$.

Γ2. Να βρείτε τον $\lambda \in (0, +\infty)$, αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\int_1^\lambda \frac{2f(x)}{x}\, dx = 2\lambda - 1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^2 \ge \ell n x + x$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Γ4. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, έχει δύο ρίζες αντίθετες, να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός α.

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x^2+1)\cdot \ell nx$.

Δ1.α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $x\cdot \ell nx \geq x-1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi=x$, τέμνει οποιαδήποτε εφαπτομένη της C_f.

Δ2. Αν γνωρίζετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $x^2\cdot f\left(\frac{\alpha}{x}\right)+f(x)=0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Δ3. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot f(\varepsilon\varphi x)+\eta\mu^2 x\cdot f(\sigma\varphi^{2024} x)=0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)\,dx > \int_2^3 f(\ell nx)\,dx$.

Δίνεται συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f}(x) = e^x - x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και στη συνέχεια,

να βρείτε την εφαπτομένη της που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = e$ τέμνει τη C_f σε δύο ακριβώς σημεία

$A\left(x_1, \mathrm{f}\left(x_1\right)\right)$ και $B\left(x_2, \mathrm{f}\left(x_2\right)\right)$, με $x_1 < 0$ και $x_2 > 1$.

Αν x_1, x_2 είναι οι τετμημένες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2, να αποδείξετε ότι:

Δ3. Η εξίσωση $x_2 \cdot \mathrm{f}(x) + x_1 \cdot x = e^x$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$.

Δ4. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M\left(\xi, \mathrm{f}(\xi)\right)$, με $\xi \in \left(1, x_2\right)$, στο οποίο η κλίση της C_f ισούται με $\dfrac{e^{x_0}}{x_0 \cdot \left(x_2 - x_1\right)}$,

όπου x_0 είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ3.

Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2\ell n x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x^2 - 2$ (1)

έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1)

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - x_0}{f\left(\dfrac{x}{x_0}\right) - 1} = -\infty$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2 - 1}\right) > 2$.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ \alpha \cdot \eta\mu x + 1, & x > 0 \end{cases}$,όπου $\alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x \cdot \left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\right]=1$.

Γ1.Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

α)ορίζεται εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M\left(0,f\left(0\right)\right)$ και στη συνέχεια ότι

(ε): $\psi = x + 1$

β)το $M\left(0,f\left(0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f

Γ3.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:τη C_f,την ευθεία (ε) και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$,

όπου (ε) είναι η εφαπτομένη που αναφέρεται στο **Γ2α.**

Γ4.Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^2 x + f\left(\eta\mu^2 x\right) = x^2 + 2$.

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0,η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1)

Δ2.Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = (x^2 - 3x + 4) \cdot e^{x - x_0}$.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα,είναι παράλληλες.

Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Δ3.Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,ισχύει: $F(-x) = F(x) + x$.

Δ4.Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (-x_0, x_0)$ τέτοιο,ώστε: $\displaystyle\int_{-x_0}^{x_0} f(x)\,dx = f(\xi)$.

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x e^x$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): \psi = -x$,

η οποία εφάπτεται στη C_f στο σημείο καμπής της, που είναι το $O(0,0)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

α) $xe^x \geq e^x - 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) $f'(x) \leq -1$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(\eta\mu x)\,dx < -1$.

Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$, με $F(0) = 0$.

Δ4. Θεωρούμε συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases} 2F(x) + x^2 - x, & x \leq 0 \\ x^3 - x, & x > 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x + e^{1-x}$,όπου $\alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία γνωρίζετε ότι ισχύει: $f(x) \geq f(\alpha)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Δ2.α)Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β)Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω G μία αρχική της f^2 στο $\mathbb{R}$,με $G(1) = 4$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ3. Η εξίσωση $G(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ,η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Δ4. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\rho,1)$ τέτοιο,ώστε $e \cdot \ln(G(x_0)) + \dfrac{1}{G(x_0)} = 0$,

όπου ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $G(x) = 0$.

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}2\ell nx, 0<x\leq 1\\ x^{\alpha}+\beta, \quad x>1\end{cases}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

για την οποία γνωρίζετε ότι έχει σημείο καμπής το $(1,0)$.

Δ1.α)Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-1$.

β)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+\ell nx=0$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1).

Δ2.Αν $x\in(x_0,+\infty)$,να λύσετε την εξίσωση $f(x+\ell nx)=2x-2$.

Δ3.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_0,1)$ τέτοιο,ώστε η ευθεία

$(\varepsilon):\psi=\dfrac{2x_0}{1-x_0}x+2(\ell n\xi-1)$ να εφάπτεται στη C_f.

Δ4.Έστω F,G,H παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(0,+\infty)$,για τις οποίες γνωρίζετε ότι υπάρχει

$\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο,ώστε να ισχύει: $F(x)=f(\eta\mu^2\varphi)\cdot G(x)+(2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+1)\cdot H(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις F,G,H είναι αρχικές της f στο $(0,+\infty)$.

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x-\alpha\cdot\ell nx$, όπου $\alpha>1$,

για την οποία γνωρίζετε ότι $\int_{1}^{\alpha}\frac{2f(x)}{x}\,dx=\alpha-2$.

Δ1.α)Να δείξετε ότι $\alpha=e$ και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Δ2.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<e<x_2<2e$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1).

Έστω συνάρτηση $g:(0,2e)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)-f(2e-x)$.

Δ3.α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γν.φθίνουσα.

β)Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο,ώστε $f(2e-x_0)=\frac{1}{2}$.

Δ4.Να αποδείξετε ότι $g(x_0)>f'(x_1)\cdot(x_0-x_1)$,όπου x_0 είναι αυτό που αναφέρεται στο **Δ3.β)**.