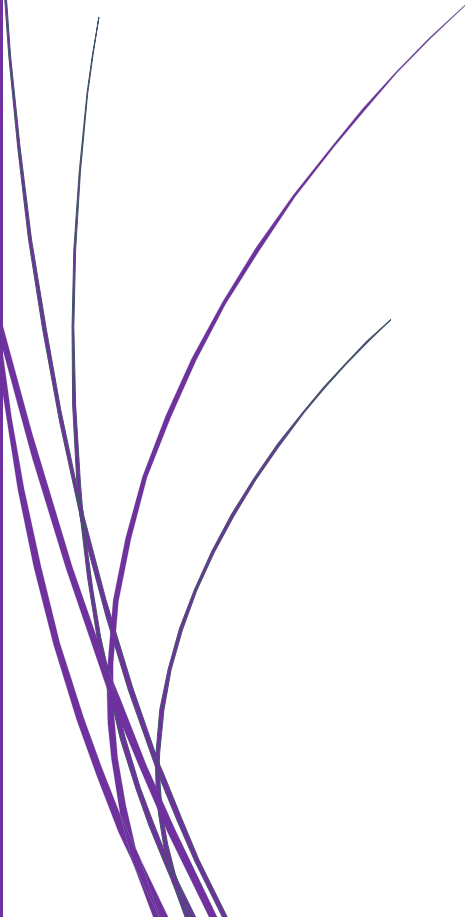




Ρυθμός μεταβολής

Στοιχεία θεωρίας και άλυτες ασκήσεις



ΟΡΙΣΜΟΣ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω δύο μεγέθη x και y , τα οποία συνδέονται με μια σχέση της μορφής $y = f(x)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

1. Με τον συμβολισμό κατά Leibniz, συμβολίζουμε τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς x όταν $x = x_0$, γράφοντας:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

2. Αν ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμο άξονα και η θέση του πάνω σε αυτόν δίνεται από την παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$ κάθε χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητα του και η επιτάχυνση του, κάθε χρονική στιγμή t , δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$v(t) = x'(t) \text{ και } a(t) = v'(t) = x''(t).$$

3. Στην οικονομία έχουμε συμφωνήσει για τους συμβολισμούς:

Κόστος παραγωγής: $K(x)$, Οριακό κόστος: $K'(x)$

Είσπραξη: $E(x)$, Οριακή είσπραξη: $E'(x)$.

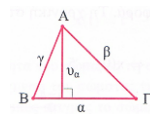
Κέρδος: $P(x)$, Οριακό κέρδος: $P'(x)$

- Το πηλίκο $\frac{\text{μέγεθος}}{x}$ για καθένα από τα παραπάνω μεγέθη δίνει το αντίστοιχο μέσο μέγεθος.

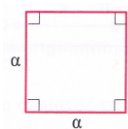
$$(\text{π.χ. για το μέσο κόστος: } K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x})$$

4. Θετικός (ή αρνητικός) ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους, σημαίνει αύξηση (ή μείωση αντίστοιχα) του μεγέθους.

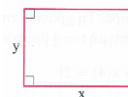
Χρήσιμοι Τύποι



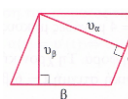
$$\Pi = \alpha + \beta + \gamma, E = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$$



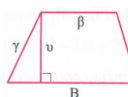
$$\Pi = 4\alpha, E = \alpha^2$$



$$\Pi = 2(x + y), E = xy$$

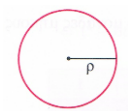


$$\Pi = 2(\alpha + \beta), E = \alpha\beta = \beta\alpha$$

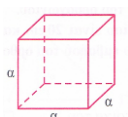


$$\Pi = B + b + \gamma + \delta$$

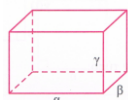
$$E = \frac{(B + b)\gamma}{2}$$



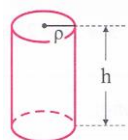
$$\Pi = 2\pi\rho, E = \pi\rho^2$$



$$E = 6\alpha^2, V = \alpha^3$$

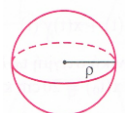


$$V = \alpha\beta\gamma, E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$$



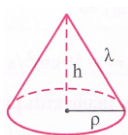
$$V = \pi\rho^2 h$$

$$E = 2\pi\rho h + 2\pi\rho^2$$



$$V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$$

$$E = 4\pi\rho^2$$



$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h$$

$$E = \pi\rho^2 + \pi\rho\lambda$$

Επίπεδα Γεωμετρικά σχήματα

01. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του, την στιγμή που αυτό είναι ίσο με 36 m^2 .
02. Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s , ενώ η πλευρά $B\Gamma$ ελαττώνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε:
- α) τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογώνιου.
- β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογώνιου όταν $AB=10 \text{ cm}$ και $B\Gamma=6 \text{ cm}$.
03. Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με σταθερή βάση $B\Gamma=16 \text{ cm}$ μεταβάλλεται με ρυθμό 5 cm/s . Αν την χρονική στιγμή t_0 το σημείο A απέχει από την πλευρά $B\Gamma$ 6 cm , να βρείτε:
- α) τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών.
- β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.
04. Αν σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Να βρείτε:
- α) με τι ρυθμό μεταβάλλεται η πλευρά του τριγώνου.
- β) με τι ρυθμό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου, όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
05. Το μήκος ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το εμβαδόν του κύκλου είναι $100\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε:
- α) την ακτίνα του κύκλου.
- β) τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου.
- γ) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου.
06. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι. Η ακτίνα r του εσωτερικού κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s και η ακτίνα R του εξωτερικού κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Την χρονική στιγμή που η

ακτίνα του εσωτερικού κύκλου είναι 5 cm και του εξωτερικού είναι 9 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζεται ανάμεσα στους δύο κύκλους.

07. Η πλευρά $\alpha(t)$ (σε cm) την χρονική στιγμή $t > 0$ (σε s) , ενός τετραγώνου δίνεται από τη σχέση $\alpha(t) = t^2 + 2t + 3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου την χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 11 cm.
08. Το μήκος ενός ορθογώνιου μειώνεται με ρυθμό 1 cm/s και η περίμετρός του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s . Να βρείτε:
- α) τον ρυθμό μεταβολής του πλάτους του ορθογώνιου.
- β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ορθογώνιου και της διαγωνίου του ορθογώνιου την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το μήκος του είναι 8 cm και το πλάτος του είναι 6 cm .
09. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Η πλευρά β αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/s και η πλευρά γ αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Κάποια χρονική στιγμή η πλευρά β είναι 3 cm και η πλευρά γ είναι 4 cm. Αυτή την χρονική στιγμή να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς α , του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

Γεωμετρικά στερεά σχήματα

10. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου V μιας σφαίρας ως προς την ακτίνα της ρ την χρονική στιγμή που αυτή είναι $\rho = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ cm / s .
11. Το ύψος x της στάθμης του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 2 cm ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{2}{\pi}$ cm / s .
- α) Να γράψετε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο του νερού V με το ύψος της στάθμης του x.
- β) Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού.
12. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $16 \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου, και του όγκου του κύβου την χρονική στιγμή που αυτή είναι 5 cm.

13. Η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $8 \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος της σφαίρας την χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι 5 cm .
14. Ο όγκος ενός σφαιρικού μπαλονιού αυξάνεται με ρυθμό $32\pi \text{ cm}^3 / \text{s}$. Να βρείτε την ακτίνα του μπαλονιού την χρονική στιγμή t_0 που η επιφάνεια του είναι $16\pi \text{ cm}^2 / \text{s}$ καθώς και τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ακτίνα του την ίδια χρονική στιγμή.
15. Μια πισίνα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και ο πυθμένας της έχει πλάτος 25 m και μήκος 40 m . Η πισίνα γεμίζει νερό με ρυθμό $500 \text{ m}^3 / \text{min}$. Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται το ύψος του νερού στην πισίνα.
16. Η ακμή ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/s . Την χρονική στιγμή που η ακμή του είναι 10 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου και του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του.
17. Η ακμή ενός κύβου κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $\alpha(t) = t^2 + t$. Την χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του κύβου είναι $72 \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 και τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου τη χρονική στιγμή t_0 .
18. Το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου την χρονική στιγμή που η ακμή του είναι 2 cm .
19. Η ακτίνα μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $2,5 \text{ mm/s}$. Την χρονική στιγμή που η ακτίνα της σφαίρας είναι 4 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας και του όγκου της σφαίρας.
20. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $20 \text{ cm}^3 / \text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας την χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι 8 cm .
21. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $2 \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας την στιγμή που η ακτίνα της είναι 6 cm .

22. Η ακτίνα r μιας σφαίρας μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη συνάρτηση $r(t) = t^2 + 1$, όπου $t > 0$ (σε s) και $r(t)$ σε m. Κάποια χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας ισούται με $32\pi \text{ cm}^2 / \text{s}$. Να βρείτε την χρονική στιγμή t_0 και τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας τη χρονική αυτή στιγμή.
23. Ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 6 cm και ύψος $h = 60$ cm είναι γεμάτο με λάδι. Με μια αντλία αφαιρούμε λάδι από το δοχείο με ρυθμό 16 ml / s. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η στάθμη του λαδιού.
24. Δίνεται κύλινδρος με ύψος $h = 6$ cm και ακτίνα βάσης r η οποία αυξάνεται με ρυθμό 25 mm / s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κυλίνδρου την χρονική στιγμή που η ακτίνα βάσης του είναι 3 cm και το ύψος του είναι 5 cm.

Γωνία τριγώνου

25. Σε ένα οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG = 10$ cm η πλευρά BΓ αυξάνεται με ρυθμό $2\sqrt{3} \text{ cm} / \text{s}$. Αν $x = B\Gamma$ και $\theta = \hat{A}B\Gamma$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει των x και θ καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E την χρονική στιγμή t_0 που το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
26. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ έχει σταθερή υποτείνουσα BΓ=10. Η πλευρά AB αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2cm/s. Την χρονική στιγμή κατά την οποία η πλευρά AB είναι 8 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς AG, του εμβαδού του τριγώνου ABΓ και της γωνίας $\hat{A}B\Gamma$.
27. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$ η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό 6 cm/s και η πλευρά AG μειώνεται με ρυθμό 4 cm/s. Την χρονική στιγμή που είναι AB= 16 cm και AG= 12 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABΓ, της περιμέτρου του τριγώνου ABΓ και της γωνίας $\theta = \hat{A}B\Gamma$ του τριγώνου ABΓ.
28. Η μια κάθετη πλευρά AB ενός ορθογωνίου τριγώνου ABΓ (με $\hat{A} = 90^\circ$) αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/s και η άλλη κάθετη πλευρά AG ελαττώνεται έτσι ώστε το τρίγωνο ABΓ να έχει σταθερό εμβαδόν 150 cm^2 .
- α) Την χρονική στιγμή που είναι AB=20 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- i) της πλευράς ΑΓ.
ii) της γωνίας $\theta = \widehat{AB\Gamma}$.
β) Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ την χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της υποτείνουσας ΒΓ είναι 0.

Όμοια τρίγωνα

29. Μία γυναίκα ύψους 1,6 m πλησιάζει προς τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 6m με ταχύτητα 1,1 m/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της σκιάς της γυναίκας.
30. Μία λάμπα (Λ) ανάβει στην κορυφή ενός φανοστάτη ύψους 15 m . Από ύψος 15 m και σε απόσταση 10 m από τον φανοστάτη αφήνουμε να πέσει μια μπάλα (Μ). Να βρείτε την ταχύτητα της σκιάς της μπάλας 0,5 s από τη στιγμή που αφήσαμε την μπάλα να πέσει. (δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$).
31. Αντεστραμμένο κωνικό δοχείο έχει διάμετρο βάσης 15 cm και ύψος 15 cm. Στην κορυφή του κωνικού δοχείου υπάρχει μία τρύπα από όπου βγαίνει νερό με ρυθμό $100 \text{ cm}^3 / \text{min}$, το οποίο πέφτει μέσα σε κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο βάσης 15 cm. Την χρονική στιγμή που το ύψος του νερού στο κωνικό δοχείο είναι 5 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους της στάθμης του νερού στο κωνικό δοχείο και στο κυλινδρικό δοχείο.
32. Αντεστραμμένη εικονική δεξαμενή ύψους 10 m έχει ακτίνα βάσης 5 m και γεμίζει με νερό με ρυθμό $2 \text{ m}^3 / \text{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του νερού την χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος 4 m.

Προβλήματα Κίνησης

Ευθύγραμμη κίνηση

33. Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε έναν άξονα δίνεται από τη σχέση:
 $x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, όπου $t \in [0, 4]$ ο χρόνος σε s. Να βρείτε:
α) την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.
β) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο.
γ) σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική φορά και σε ποια προς την αρνητική φορά.

δ) το ολικό διάστημα που διάνυσε το σημείο κατά τα 4 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του.

34. Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμο άξονα και η θέση του πάνω σε αυτόν δίνεται από τη σχέση:

$x(t) = t^3 + \kappa t^2 + \lambda t + \mu$, με $t \in [0, 6]$ όπου t ο χρόνος σε s και x σε cm. Γνωρίζουμε ότι την χρονική στιγμή 2s το σώμα βρίσκεται στη θέση 3, η ταχύτητα του είναι -9cm/s και η επιτάχυνση του είναι -6cm/s^2 .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = -9$, $\lambda = 15$, $\mu = 1$.

β) Να βρείτε τη μετατόπιση του σώματος

γ) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα.

35. Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμο άξονα και η θέση του πάνω σε αυτόν δίνεται από τη σχέση:

$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$ με $t \in [0, 5]$ (t σε min).

α) Να βρεθεί η αρχική θέση του σώματος.

β) Να βρεθεί η ταχύτητά του και επιτάχυνσή του κάθε χρονική στιγμή.

γ) Να βρεθεί ποιες χρονικές στιγμές αλλάζει η φορά κίνησης του σώματος.

δ) Ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;

ε) Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα τα 5 πρώτα λεπτά.

στ) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του, τα 5 πρώτα λεπτά.

ζ) Σε ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα έχει μέτρο 9;

η) Τι δείχνει η τιμή $|x(5) - x(0)|$;

36. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση πάνω σε έναν άξονα $x'x$ και η θέση του $x(t)$ δίνεται από

την σχέση: $x(t) = t^2 - 6t + 5$, με $t \in [0, 10]$ (t σε s).

α) Ποια είναι η αρχική θέση του κινητού;

β) Πόση είναι η ταχύτητά του μετά από 4s;

γ) Ποια είναι η επιτάχυνση του κάθε χρονική στιγμή t ;

δ) Ποια χρονικά διαστήματα κινείται προς τα αριστερά και ποια προς τα δεξιά;

ε) Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό κατά τα πρώτα 10 s.

37. Ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση:

$x = f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t$ με $t \geq 0$ (t σε s).

α) Ποια είναι η αρχική θέση του κινητού;

β) Ποια είναι η ταχύτητά του την χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$;

γ) Να βρείτε την στιγμιαία ταχύτητα του κινητού την κάθε χρονική στιγμή t .

- δ) Ποιες χρονικές στιγμές το κινητό είναι ακίνητο;
- ε) Ποιο χρονικό διάστημα κινείται προς τα αριστερά;
- στ) Ποια είναι η μεγαλύτερη απομάκρυνσή του προς τα αριστερά;
- ζ) Ποια είναι η επιτάχυνσή του την χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$;

Πρόβλημα σκάλας

- 38.** Σε έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη πλάγια μια σκάλα μήκους 5m . Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό 1m/s . Την χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3m , να βρείτε:
- α) σε τι ύψος είναι στερεωμένη η σκάλα.
 - β) με τι ρυθμό πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας.
 - γ) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζεται από την σκάλα, τον τοίχο και το έδαφος.
 - δ) τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο.
- 39.** Σκάλα μήκους 10m βρίσκεται στερεωμένη πλάγια σε κατακόρυφο τοίχο. Την χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3m , η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος μειώνεται με ρυθμό $\frac{\pi}{10}\text{rad/s}$. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον τοίχο το κάτω μέρος της σκάλας καθώς και την ταχύτητα με την οποία πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας.

Απόσταση

- 40.** Ένας γερανός έλκει οριζόντια ένα βαρύ αντικείμενο, που βρίσκεται στο έδαφος, με συρματόσχοινο. Η τροχαλία βρίσκεται σε ύψος 3m από το έδαφος και πάνω από τον γερανό. Αν το συρματόσχοινο διέρχεται από την τροχαλία με ρυθμό 20m/min , βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο το σώμα πλησιάζει τον γερανό, όταν αυτό απέχει 4m .
- 41.** Δύο πλοία Α και Β, που κινούνται το ένα ανατολικά και άλλο βόρεια με ταχύτητες $v_A = 12\text{km/h}$ και $v_B = 18\text{km/h}$ αντίστοιχα, διήλθαν από έναν φάρο στη 1μ.μ. και στις 2μ.μ. αντίστοιχα. Να βρείτε την απόσταση των δύο πλοίων στις 3μ.μ. καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της απόστασής τους την ίδια ώρα.

42. Μια λάμπα είναι τοποθετημένη σε μια κολόνα και φωτίζει από ύψος 5,1 m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της του μήκους της σκιάς ενός ανθρώπου ύψους 1,70 m , ο οποίος απομακρύνεται από την κολόνα με ταχύτητα 2m/s .

Κίνηση σε γραφική παράσταση

43. Η εφαπτομένη AB της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ στο μεταβλητό σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία A, B αντίστοιχα.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο M.
- β) Να αποδείξετε ότι $AM = MB$.
- γ) Να υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του α και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ως προς α .
44. Ένα σημείο M κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^2$. Η τετμημένη του M είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ρυθμό 2. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x - y + 2018 = 0$, καθώς και την τετμημένη του M την στιγμή αυτή.
45. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x + 3$. Αν την χρονική στιγμή t_0 η κλίση της f στο σημείο M είναι 25 και η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s , να βρείτε:
- α) την τετμημένη του M.
- β) τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M.
46. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy είναι σχεδιασμένος ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$. Ένα σώμα κινείται στον παραπάνω κύκλο. Την χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, 1)$ του κύκλου, η τετμημένη του σώματος μειώνεται με ρυθμό 4 μονάδες /s. Την χρονική αυτή στιγμή να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
- α) της τεταγμένης του σώματος.
- β) της απόστασης d του σώματος από το σημείο $M(5\sqrt{3}, 0)$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ με $x \in [0, 5]$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f είναι τεταρτοκύκλιο, το οποίο έπειτα να σχεδιάσετε.

β) Ένα σημείο M κινείται πάνω στην C_f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες /s. Επίσης δίνεται ότι N είναι η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και A το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$. Την χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $K(3, 4)$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της γωνίας $\hat{MOA}$.

ii) του εμβαδού του μικτόγραμμου τριγώνου που περικλείεται από τα τμήματα MN και από το τόξο AM .

Προβλήματα Οικονομίας

48. Μια βιομηχανία κατασκευάζει x χιλιάδες τεμάχια ενός προϊόντος τον μήνα. Το κόστος παραγωγής x χιλιάδων τεμαχίων είναι: $K(x) = 20x^2 + 100x + 200$ (σε χιλιάδες €), ενώ η τιμή πώλησης 1000 τεμαχίων του προϊόντος είναι: $T(x) = x^2 - 40x + 1000$ (σε χιλιάδες €) για $x > 0$.

α) Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

β) Να βρείτε το μέσο κόστος, το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, όταν η βιομηχανία κατασκευάζει 10.000 τεμάχια του προϊόντος τον μήνα.

49. Η αξία ενός πίνακα ζωγραφικής εκτιμάται ότι θα είναι: $A(t) = 10.000e^{\sqrt{t}}$ € μετά από t χρόνια.

Να βρείτε την σημερινή αξία του πίνακα καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της αξίας του μετά από 25 χρόνια.

50. Μια βιομηχανία κατασκευάζει x τεμάχια ενός προϊόντος κάθε μέρα. Το κόστος παραγωγής x τεμαχίων είναι: $K(x) = 6x^2 + 100x - 20$ €, ενώ η τιμή πώλησης κάθε τεμαχίου είναι:

$$0,4x^2 - 21x + 640 \text{ €}.$$

α) Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

β) Να βρείτε το μέσο κόστος, το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, όταν η βιομηχανία κατασκευάζει 600 τεμάχια την ημέρα.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + xf(x) = 0$ έχει ακριβώς μία θετική λύση.

β) Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f και την στιγμή t_0 που το M έχει τεταγμένη e , αυτή αυξάνεται με ρυθμό e^2 μονάδες /s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M την στιγμή t_0 .

52. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 0, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 - \eta \mu x) - 2}{\eta \mu x} = 3$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

β) Ένα σημείο N κινείται κατά μήκος της εφαπτομένης και ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 2 μονάδες /s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN .

53. Η ολική αντίσταση R δύο αντιστάσεων R_1 και R_2 , που είναι συνδεδεμένες παράλληλα δίνεται

από τον τύπο: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Η αντίσταση R_1 αυξάνεται με ρυθμό 2 Ω /min, ενώ η αντίσταση R_2

μειώνεται με ρυθμό 3 Ω /min. Την χρονική στιγμή που είναι $R_1 = 10 \Omega$ και $R_2 = 20 \Omega$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ολικής αντίστασης R .

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.

α) Να βρείτε σημείο A της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται πάνω στην C_f έτσι ώστε να ισχύει: $x'(t) = 2x(t)$. Την στιγμή t_0 το M διέρχεται από το A . Για την χρονική στιγμή t_0 να βρείτε:

- i) τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M .
- ii) τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης OM .

55. Η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφήσει ο ανθρώπινος οργανισμός κάθε χρονική

στιγμή $t \geq 0$ δίνεται από την συνάρτηση $f(t) = 6 \cdot 2^{-\frac{t}{250}}$. Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού είναι ίσος με το $\frac{1}{256}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά την χρονική στιγμή $t = 0$.

ΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

56. Ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση σε οριζόντιο άξονα και η θέση του την χρονική στιγμή t

δίνεται από την συνάρτηση: $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + 12$, με $t \in [0, 6]$.

α) Να βρείτε την αρχική θέση, την αρχική ταχύτητα και την αρχική επιτάχυνση του σώματος.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κινητό αποκτά την μέγιστη και την ελάχιστη ταχύτητα.

γ) Να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή $t = 1$ s, το σώμα κινείται με την μικρότερη ταχύτητα την οποία και να υπολογίσετε.

δ) Να αποδείξετε ότι κατά την διάρκεια των 3 πρώτων δευτερολέπτων της κίνησης του, κάποια

χρονική στιγμή κινείται με ταχύτητα $\frac{e^2}{\pi}$ m/s.

ε) Να αποδείξετε ότι το κινητό, μετά το 1^ο δευτερόλεπτο της κίνησής, του δεν επιβραδύνει.