

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία

Α2.Θεωρία

Α3.Θεωρία

Α4.α) Ψ

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 2$, ενώ το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει, δεδομένου ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$.

Α5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$ ως διαφορά των συνεχών e^x [εκθετική] και $\ln(x+1)$ [σύνθεση λογαριθμικής, πολυωνυμικής].

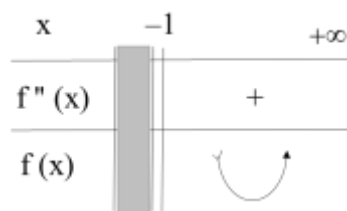
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων e^x [εκθετική] και $\ln(x+1)$ [σύνθεση λογαριθμικής, πολυωνυμικής], με

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, \quad x \in D_{f'} = (-1, +\infty).$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων e^x [εκθετική] και $\frac{1}{x+1}$ [ρητή], με

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \in D_{f''} = (-1, +\infty).$$

Συνεπώς $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in D_{f''} = (-1, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$ και κατά συνέπεια δεν έχει σημεία καμπής.

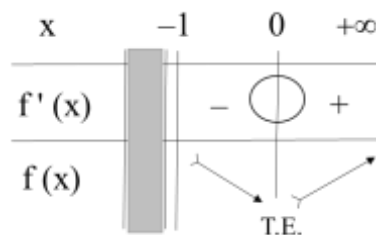


Β2. Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in D_{f''} = (-1, +\infty)$, η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

Έχουμε ότι:

- $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο 0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

- $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο 0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.



Συνεπώς η f παρουσιάζει τοπικό (αλλά και ολικό) ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=1$ στο σημείο $A(0,1)$.

B3. Έχουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1)] = +\infty,$

αφού $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^x = e^{-1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty,$

οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln(x+1)}{x} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty,$

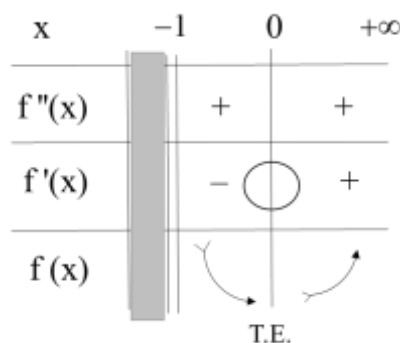
αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x+1)} = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - \ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ e^x \left[1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} \right] \right\} = +\infty,$$

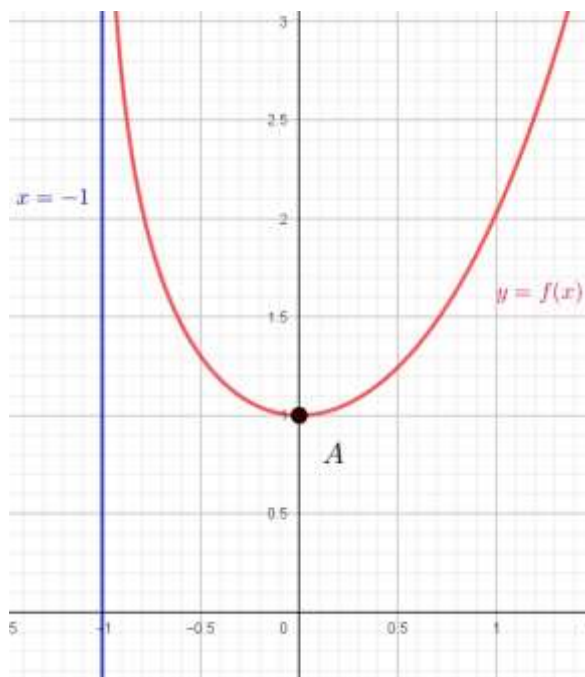
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω στοιχεία έχουμε:

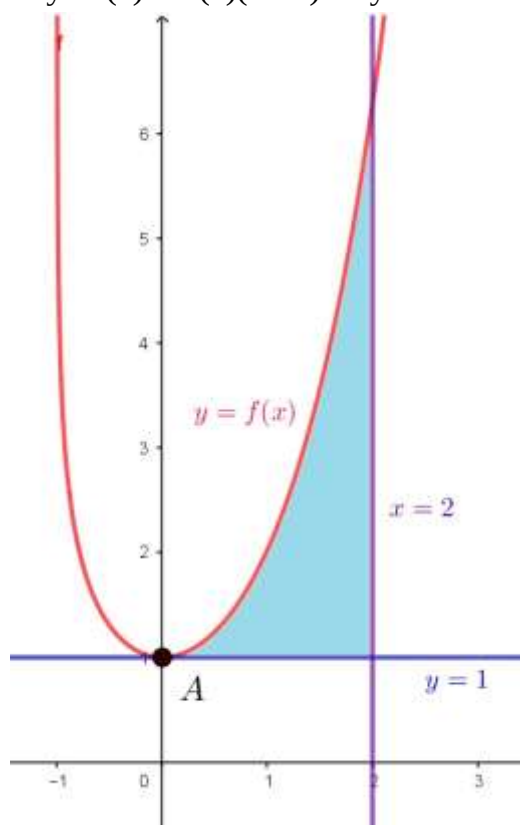


Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



B4. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x = 0$, έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 1.$$



Έχουμε ότι:

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 1, οπότε $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$,

- $$\begin{aligned} \int_0^2 \ln(x+1)dx &= \int_0^2 (x)' \ln(x+1)dx = [x \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \\ &= [x \ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= [x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^2 = 2\ln 3 - 2 + \ln 3 = 3\ln 3 - 2, \end{aligned}$$
- $$\int_0^2 (e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^2 = e^2 - 2 - 1 + 0 = e^2 - 3.$$

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη C_f , στην ευθεία (ε) και στην ευθεία $x=2$, είναι

$$E = \int_0^2 |f(x) - 1| dx = \int_0^2 (f(x) - 1) dx = \int_0^2 [e^x - \ln(x+1) - 1] dx = e^2 - 3 - 3\ln 3 + 2,$$

δηλαδή

$$E = (e^2 - 3\ln 3 - 1) \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < 4$, έχουμε ότι:

$$2f(x)f'(x) = -1 \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (-x)' \Leftrightarrow f^2(x) = c - x.$$

Όμως

$$f(3) = 1 \Rightarrow f^2(3) = 1 \Rightarrow c - 3 = 1 \Rightarrow c = 4,$$

οπότε

$$f^2(x) = 4 - x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{4 - x}, x \in D_f = (-\infty, 4] \quad (\text{I}).$$

Επίσης η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη για κάθε $x \in (-\infty, 4)$, αφού

$$f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

και κατά συνέπεια η συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 4)$.

Δεδομένου ότι $f(3) = 1 > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 4)$, ενώ από την (I) ισχύει ότι $f(4) = 0$, άρα:

$$f(x) = \sqrt{4 - x}, x \in D_f = (-\infty, 4].$$

Γ2. Έχουμε ότι:

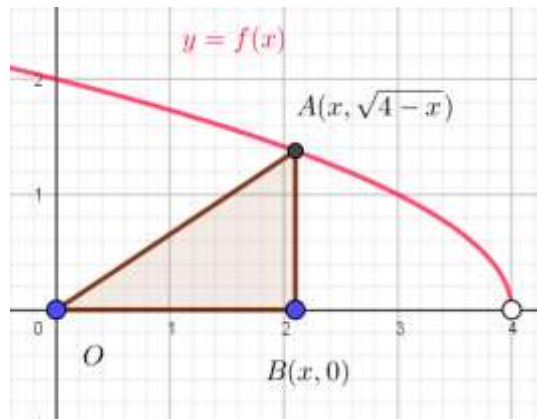
$$\begin{aligned} D_h = D_{f \circ g} &= \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1] \end{aligned}$$

και

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{4 - (x^2 + 3)} = \sqrt{1 - x^2}, x \in D_h = [-1, 1].$$

Γ3. Για $0 < x < 4$ έχουμε ότι $A(x, \sqrt{4-x})$, $B(x, 0)$ και $O(0, 0)$, οπότε για το ορθογώνιο τρίγωνο OAB ισχύει

$$(OAB) = \frac{OB \cdot AB}{2} = \frac{x\sqrt{4-x}}{2}.$$



Θεωρούμε τη συνάρτηση

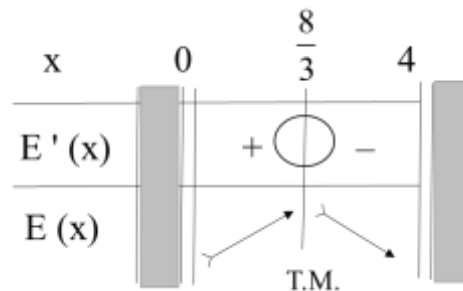
$$E(x) = \frac{x\sqrt{4-x}}{2}, 0 < x < 4,$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0,4)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων (άρα και συνεχών) συναρτήσεων $\frac{x}{2}$ [πολυωνυμική], $\sqrt{4-x}$ [σύνθεση πολυωνυμικής-άρρητης] με

$$E'(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} + \frac{-x}{4\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{4\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}.$$

Τότε:

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3},$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{8}{3},$



και δεδομένου ότι η συνάρτηση E είναι συνεχής στο $\frac{8}{3}$, έχουμε ότι η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{8}{3}, 4\right)$, γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{8}{3}\right]$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{8}{3}$ το $E\left(\frac{8}{3}\right)$.

Το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $\Lambda\left(\frac{8}{3}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

Γ4. Έχουμε ότι $h(t) = \sqrt{1-x^2(t)}$, $t \geq 0$, $-1 \leq x(t) < 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\sqrt{x}$ [άρρητη], $1-x^2$ [πολυωνυμική] και $x(t)$, με

$$h'(t) = \frac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{1-x^2(t)}}, t \geq 0, -1 \leq x(t) < 0.$$

α) Για $t \geq 0$, $-1 \leq x(t) < 0$, θέλουμε $t_0 \geq 0$ έτσι ώστε:

$$h'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{-2x(t_0)x'(t_0)}{2\sqrt{1-x^2(t_0)}} = x'(t_0) \Leftrightarrow -x(t_0) = \sqrt{1-x^2(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(t_0) = 1-x^2(t_0) \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(t_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Συνεπώς

$$h(t_0) = \sqrt{1-x^2(t_0)} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $K\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

β) Έχουμε ότι

$$h'(t_0) = \frac{-x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{1-x^2(t_0)}} = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2}{\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

Έστω $M(x(t), 0)$ και αφού

$K(x(t), h(t))$, ισχύει $\hat{\omega} = \hat{K\hat{O}M}$

και $\eta\mu\omega = \frac{KM}{OK}$, άρα

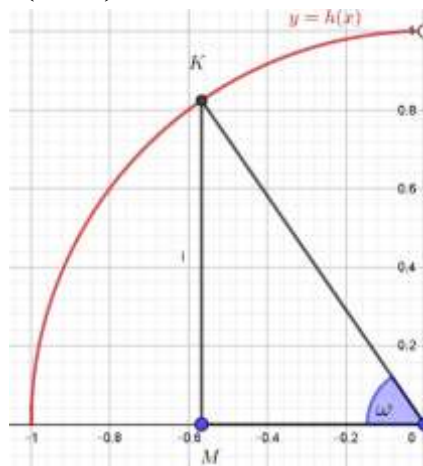
$$\begin{aligned} \eta\mu(\omega(t)) &= \frac{h(t)}{1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(\omega(t))\omega'(t) &= h'(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(\omega(t_0))\omega'(t_0) &= h'(t_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega'(t_0) &= \frac{2}{\sin(\omega(t_0))}. \end{aligned}$$

Για $t = t_0$ έχουμε

$$\sin(\omega(t_0)) = \frac{OM}{OK} = \frac{|x(t_0)|}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

άρα

$$\omega'(t_0) = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ rad / μονάδα χρόνου.}$$



Γ5. Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4-x}$, $x \in D_f = (-\infty, 4]$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $D_f = (-\infty, 4)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων (άρα και συνεχών) $\sqrt{x}$ [άρρητη], $4-x$ [πολυωνυμική] με

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}},$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}^2} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{4-x}} = +\infty,$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 4.

Συνεπώς $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f = (-\infty, 4)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 4]$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 4]$, άρα «1 - 1» και κατά συνέπεια αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $D_f = (-\infty, 4]$, οπότε

$$f(D_f) = \left[f(4), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

άρα $f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 4]$.

Συνεπώς

$$y = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow y^2 = 4-x \Leftrightarrow x = 4-y^2,$$

άρα $f^{-1}(x) = 4-x^2$, $x \in D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$.

Όμως

$$\frac{x}{4-x^2} = -\left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} \right),$$

άρα

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx &= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} \right) dx = -\left[\frac{1}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x+2| \right]_0^1 = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} \ln 2^2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \ln \sqrt{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Τότε για $x \in [0, 1]$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} = \frac{\eta\mu x}{4-x^2} \leq \frac{x}{4-x^2},$$

οπότε

$$\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} dx < \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)} dx < \ln \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $\alpha = \beta$, έχουμε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 1 \\ \alpha x^2 - \alpha x + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

Τότε:

- για $0 \leq x < 1$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική,
- η f είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 - \alpha x + 1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^\alpha = 1 = f(1),$$

άρα η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως πολυωνυμική.

Τέλος $f(0) = f(1) = 1$, οπότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα είναι και συνεχής στο 1, οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x^2 - \beta x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^\alpha = \alpha - \beta + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha - \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 1 - 1}{x - 1} \stackrel{\alpha = \beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \alpha x = \alpha, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x - 1} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln x} (\ln x + 1)}{1} = 1, \end{aligned}$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, αν $\alpha = 1$ και κατά συνέπεια $\alpha = \beta = 1$.

Πράγματι για $\alpha = \beta = 1$ ισχύει $f(x) = \begin{cases} x^x, & x \geq 1 \\ x^2 - x + 1, & x < 1 \end{cases}$ και έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1,$$

οπότε οι λύσεις $\alpha = \beta = 1$ είναι δεκτές.

Δ3. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) - x - 3 = \begin{cases} x^x - x - 3, & x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 2, & x < 1 \end{cases}.$$

Αφού (από το Δ2) η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, παραγωγίσιμη στο 1 είναι και η φ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με $\varphi'(1) = f'(1) - 1 = 0$.

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $-x - 3$ [πολυωνυμική], x^x [σύνθεση των συνεχών e^x (εκθετική), $x \ln x$ -γινόμενο των παραγωγίσιμων x (πολυωνυμική), $\ln x$ (λογαριθμική)].

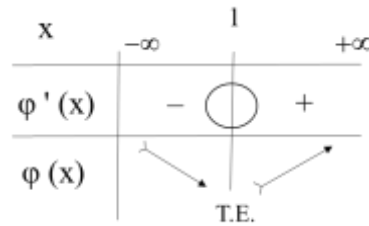
Συνεπώς:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} x^x (\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \\ 2x - 2, & x < 1 \end{cases}$$

Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης:

- $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow \ln x + 1 > 1 \Rightarrow x^x (\ln x + 1) > 1 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (ως συνεχής στο 1),
- $x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 2 < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$, οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ (ως συνεχής στο 1).



Επομένως:

- η φ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_1 = (-\infty, 1]$, άρα ισχύει $\varphi(A_1) = \left[\varphi(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right) = [-3, +\infty)$,
- η φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2 = (1, +\infty)$, άρα ισχύει $\varphi(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-3, +\infty)$.

Συνεπώς $0 \in \varphi(A_1), \varphi(A_2)$ και η φ είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα A_1, A_2 , άρα η $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα σε κάθε ένα από τα A_1, A_2 , οπότε η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία τομής με την ευθεία $y = x + 3$.

Δ4. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x dx &= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2x \ln x \frac{1}{x} dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = \\ &= e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx = e - 2 \left[x \ln x \right]_1^e + 2 \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - \left[2x \ln x \right]_1^e + \left[2x \right]_1^e = e - 2. \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \int_1^e g^2(x) dx &\leq \int_1^e 2 \ln x g(x) dx + 2 - e \Leftrightarrow \int_1^e g^2(x) dx - \int_1^e 2 \ln x g(x) dx - 2 + e \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_1^e \left[g^2(x) - 2 \ln x g(x) + \ln^2 x \right] dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^e [g(x) - \ln x]^2 dx \leq 0 \quad (\text{I}). \end{aligned}$$

Αν $[g(x) - \ln x]^2 \geq 0$, χωρίς να είναι παντού μηδέν, για κάθε $x \in [1, e]$,

τότε $\int_1^e [g(x) - \ln x]^2 dx > 0$, κάτι που είναι άτοπο, άρα

$$[g(x) - \ln x]^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = \ln x, x \in D_g = [1, e].$$

Επίσης για $x \in [1, e]$ έχουμε:

$$x^x = e^{x \ln x} \geq x \ln x + 1,$$

δεδομένης της $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς για να αποδείξουμε ότι η C_f είναι πάνω από τη C_g στο $[1, e]$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$x \ln x + 1 > \ln x \Leftrightarrow x \ln x + 1 - \ln x > 0 \quad (\text{II}).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x \ln x + 1 - \ln x, x \in D_h = [1, e]$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ ως πράξεις δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x \in D_{h'} = [1, e],$$

$$h''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, x \in D_{h''} = [1, e].$$

Συνεπώς $h''(x) > 0, x \in D_{h''} = [1, e]$, άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$ και κατά συνέπεια

$$x > 1 \Rightarrow h'(x) > h'(1) \Rightarrow h'(x) > 0,$$

κάτι που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, ως συνεχής σε αυτό.

Επομένως

$$x \geq 1 \Rightarrow h(x) \geq h(1) \Rightarrow h(x) \geq 1 \Rightarrow x \ln x + 1 - \ln x > 0,$$

δηλαδή ισχύει η (II), άρα η C_f είναι πάνω από τη C_g στο $[1, e]$.

Δ5. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών e^x (εκθετική), $x \ln x$ -γινόμενο των παραγωγίσιμων x (πολυωνυμική), $\ln x$ (λογαριθμική)].

Συνεπώς (και χρησιμοποιώντας το Δ2):

$$f'(x) = \begin{cases} x^x(\ln x + 1), & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}.$$

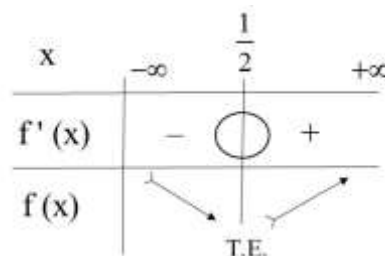
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^x(\ln x + 1) = 0, & x \geq 1 \\ 2x - 1 = 0, & x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \\ \bullet \quad f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^x(\ln x + 1) > 0, & x \geq 1 \\ 2x - 1 > 0, & x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2}, & x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$),

γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ (ως συνεχής στο $\mathbb{R}$) και κατά συνέπεια παρουσιάζει μοναδικό τοπικό (αλλά και ολικό) ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.



Επομένως:

$$f(x) + \sqrt{3f(x)} + x^2 - x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(x)}^2 + 2\sqrt{f(x)}\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 \quad \text{(III)}.$$

Όμως

- $f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 3,$
όπου η ισότητα ισχύει μόνο στη θέση του ολικού ελαχίστου,
δηλαδή για $x = \frac{1}{2}$ και
- $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{2}$,

άρα από την (III) έχουμε ότι $x = \frac{1}{2}$.