

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 16 ΑΠΡΙΛΗ 2014
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat

Μονάδες 7

A2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B , αντίστοιχα. Πώς ορίζεται η πρόσθεση των συναρτήσεων f, g ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = k$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -k$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)
Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Όταν για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ισχύει $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in A$, τότε το λ είναι ολικό ελάχιστο της f .

β) Για κάθε ζεύγος συνεχών συναρτήσεων f, g στο $[a, b]$ με $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, με $x > -1$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . Στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x=0$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη C_f , στην ευθεία (ε) και στην ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 4]$ και ισχύει: $2f(x)f'(x) = -1$, για κάθε $x < 4$ με $f(3) = 1$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = 3 + x^2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 6

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε $f(x) = \sqrt{4-x}$.

Γ2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το σημείο $A(x, f(x))$, $0 < x < 4$ για το οποίο μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου B η προβολή του A πάνω στον άξονα των x και O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Γ4. Το υλικό σημείο $K(x, \sqrt{1-x^2})$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = h(x)$ με $-1 \leq x < 0$.

α) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του K ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, αν υποθεθεί ότι $x'(t) \neq 0$, για $t \geq 0$.

β) Αν την ίδια χρονική στιγμή είναι $x'(t_0) = 2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η OK με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' .

Μονάδες 6

Γ5. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $\int_0^1 \frac{\eta \mu x}{f^{-1}(x)} dx < \ln \sqrt{\frac{4}{3}}$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^x, & x \geq 1 \\ ax^2 - \beta x + 1, & x < 1 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση g στο $[1, e]$ για την οποία ισχύει $\int_1^e g^2(x) dx \leq \int_1^e 2 \ln x g(x) dx + 2 - e$.

Δ1. Αν $\alpha = \beta$, να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$.

Μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Μονάδες 5

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε ότι $\alpha = \beta = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x + 3$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln x$ και στη συνέχεια ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g στο $[1, e]$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) + \sqrt{3f(x)} + x^2 - x = 2$.

Μονάδες 6