

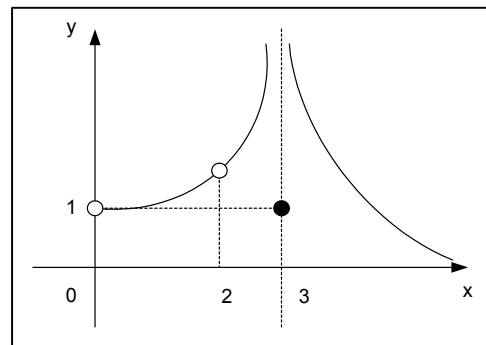
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

- 1) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$, τότε :
- i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
 - ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{x}$.
- 2) Αν $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 + 3)f(x)] = +\infty$, να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 2.
- 3) Αν f συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+4}}{x} = 3$, τότε
- i) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.
 - ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :
- α) είναι συνεχής στο $x_0 = -3$, β) είναι περριτή και γ) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) + 1 - \eta\mu(x+3)}{x^2 - 9} = 2$.
- i) Να βρείτε το $f(-3)$.
 - ii) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.
 - iii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2f(x) + 1}{x - 3}$.
- 5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -1 \\ 4x-5, & x < -1 \end{cases}$.
- Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f , g και $g \circ f$ στο $x_0 = -1$.
- 6) Αν f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(x \cdot y) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$, τότε:
- i) Να βρείτε το $f(1)$.
 - ii) Αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο 1, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.
 - iii) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{\alpha^2 + 2f(\alpha)}{\alpha}$, για κάθε $\alpha \neq 0$.

- 7) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η f είναι ασυνεχής.

ii) Αν $g(x) = \frac{\alpha x + 1}{f(x)}$, να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της g και να βρείτε το α ώστε να είναι συνεχής στο 3.



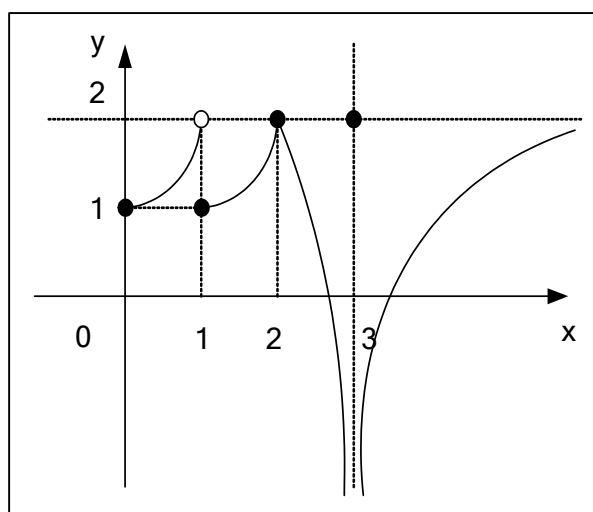
- 8) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

A) Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Η f είναι ασυνεχής στο 0.
- ii) Η f είναι ασυνεχής στο 1.
- iii) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$.
- iv) Η f είναι ασυνεχής στο 3.

B) Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x) \cdot \ln(x-3)].$$



- 9) Αν f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|g(x)| \leq f(x) \leq \frac{|\eta \mu x|}{e^x}$, να δείξετε ότι :

- i) $f(0) = g(0) = 0$.
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- iii) Υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ ώστε $(x_0 - 1)g^2(x_0) = f(x_0) - 1 + x_0^2$.

- 10) Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με :
- $$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta}.$$

- 11) A) Αν για μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει: $f(\alpha) + f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ όπου $2a + 3\gamma = 0$. Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$.

- 12) Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και για κάθε x στο $[0,1]$ ισχύει ότι : $-1 < f(x) \leq 0$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h με $h(x) = 3f(x) + 4x$ και g , με $g(x) = f^2(x)$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in [0,1]$.
- 13) Έστω f συνεχής στο $[0,4]$ για την οποία ισχύει $f(0) = f(4)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [0,4]$ με $\alpha - \beta = 2$ και $f(\alpha) = f(\beta)$.
- 14) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $x \cdot f^2(x) + f(x) = 2e^x + x^2$ να δείξετε ότι :
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
 - Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
 - Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) < -\frac{1}{x}$.
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 15) Α) Αν f συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f^2(x) - e^{2x} = 1 - 2e^x$ (1), να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1).
 Β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει $f^2(x) - 5f(x) + 6 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 16) Αν f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \right) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ και οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, να δείξετε ότι :
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$.
 - Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f(\xi) + f^2(\xi) = \frac{g(\xi)}{\xi}$.
- 17) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{x}{\eta\mu x} \right) = 2$.
 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.
- 18) Έστω $f(x) = x^2 + ax + \beta$, $g(x) = -x^2 + ax + \beta$, $\beta \neq 0$. Αν ρ_1 ρίζα της $f(x)$, ρ_2 ρίζα της $g(x)$ με $\rho_1 < \rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\kappa \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = 0$ με κ, λ θετικούς έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

- 19) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση φ , στο $\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε πραγματικό x ισχύει:
 $x \cdot \varphi^2(x) + \varphi(x) = x^2 - x + 30$.
 i) Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) > 0$ για κάθε πραγματικό x .
 ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει κ στο $(0,1)$ ώστε $\varphi(\kappa) = 11$.
 iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \varphi(x) = \frac{x}{\varphi^3(x)} + (1-x) \cdot \lambda^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ για κάθε πραγματικό λ .
- 20) A) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$, τέτοιος ώστε $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.
 B) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
- 21) A) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ με :

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)}{3}.$$

 B) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θετικοί με $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \kappa$ και $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \beta]$, ώστε $\theta_1 \cdot f(x_1) + \theta_2 \cdot f(x_2) + \theta_3 \cdot f(x_3) = \kappa \cdot f(\gamma)$.
- 22) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) < f(2)$ και $f(2) > f(3)$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, δηλαδή δεν ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} .
- 23) Έστω f, g δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε : $f(x) = (g(x) - x)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.
 Αν η g είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον $g(0) > 0$, $g(1) < -1, x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $\mathbb{R}$.
- 24) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει : $x^2 \cdot f(x) + x^3 - 2x^2 + 2x^4 \cdot \eta \mu^2 \frac{1}{x} = 0$, τότε :
 i) Να βρείτε τον τύπο της f και το σύνολο τιμών της.
 ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.
- 25) Αν f συνεχής στο $[1, e^3]$ με σύνολο τιμών το $[1, e]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e^3)$.
- 26) Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) > f(x), x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

- 27)** A) Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- B) Αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο n (n : άρτιος) βαθμού και υπάρχει x_0 στο $\mathbb{R}$ ώστε $\alpha_v \cdot P(x_0) < 0$ να δείξετε ότι το πολυώνυμο έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- 28)** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ έχει ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.
- 29)** Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(10) = 9$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$.
- i) Να δείξετε ότι $f(9) = \frac{1}{9}$.
- ii) Να βρείτε το $f(5)$.
- 30)** Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
- α) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και β) $f^3(x) - f(x) = x^2 - x$, για κάθε $x \in [0,1]$.
- Να δείξετε ότι η f είναι ασυνεχής στο $[0,1]$.
- 31)** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^3(x) + f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- i) $f(0) = 0$.
- ii) Η f είναι συνεχής στο 0.
- iii) Υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία και να βρείτε.