

# ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup> ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ - ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0, \alpha \neq 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

$$\chi^2 - S\chi + P = 0$$

$$S = \chi_1 + \chi_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$P = \chi_1 \cdot \chi_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΟΚΑΝΑΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

#### 4.1 Οι ανισώσεις $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

➤  **$\alpha x + \beta > 0$**  : Για  $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha x > -\beta \Rightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$

Για  $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha x > -\beta \Rightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$

Για  $\alpha = 0 \Rightarrow 0x > -\beta$  οπότε :

1) για  $\beta > 0$  αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

2) για  $\beta < 0$  είναι αδύνατη.

➤ Ομοίως για την ανίσωση  $\alpha x + \beta < 0$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Να λυθεί η ανίσωση :  $\frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{4} > 1$  Ε.Κ.Π. = 12

$$12 \frac{x-3}{2} - 12 \frac{x-4}{3} - 12 \frac{x-5}{4} > 12 \quad [\text{πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με}$$

το 12]

$$6(x-3) - 4(x-4) - 3(x-5) > 12$$

(απαλοιφή παρονομαστών)

$$6x - 18 - 4x + 16 - 3x + 15 > 12$$

(πράξεις)

$$6x - 4x - 3x > 12 + 18 - 16 - 15$$

(χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$$-1x > -1$$

[διαιρούμε και τα 2 μέλη με -1 και

αλλάζουμε φορά]

$$x < 1$$

$$\text{άρα } x \in (-\infty, 1)$$

#### 4.2 **Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$**

➤ Κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$  λέγεται **πολυωνυμική συνάρτηση** 2<sup>ου</sup> βαθμού η δε παράσταση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  λέγεται **τριώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού** ή απλά **τριώνυμο**.

➤ Διακρίνουσα τριωνύμου είναι η διακρίνουσα της αντίστοιχης εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$   
δηλαδή  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

➤ Ρίζες τριωνύμου – ρίζες της συνάρτησης f είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$$\text{δηλαδή } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$  παραγοντοποιείται ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας ως εξής:

|                                    |                                                             |                                                                                                                                                              |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ | Ρίζες τριωνύμου                                             | Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων                                              |
| αν $\Delta > 0$                    | $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$     | $f(x) = \alpha(x - \chi_1)(x - \chi_2)$<br>όπου $\chi_1, \chi_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$                                   |
| Αν $\Delta = 0$                    | Έχει μία διπλή ρίζα<br>τη $\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ | $f(x) = \alpha(x - \chi_0)^2$<br>όπου $\chi_0$ η διπλή ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$                                                 |
| Αν $\Delta < 0$                    | Δεν έχει πραγματικές ρίζες                                  | $f(x) = \alpha \left[ \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{ \Delta }{4\alpha^2} \right]$ και δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων |

### Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$

- 1) Αν  $\Delta > 0$  το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες, έστω  $\chi_1, \chi_2$  με  $\chi_1 < \chi_2$  και είναι ομόσημο του  $\alpha$  αν το  $x$  βρίσκεται εκτός των ριζών και ετερόσημο του  $\alpha$  αν το  $x$  βρίσκεται εντός των ριζών

|        |                      |                        |                      |           |
|--------|----------------------|------------------------|----------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$            | $\chi_1$               | $\chi_2$             | $+\infty$ |
| $f(x)$ | Ομόσημο του $\alpha$ | Ετερόσημο του $\alpha$ | Ομόσημο του $\alpha$ |           |

- 2) Αν  $\Delta = 0$  το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα την  $\chi_0$  και είναι ομόσημο του  $\alpha$  για κάθε  $x \neq \chi_0$

|        |                      |                      |           |
|--------|----------------------|----------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$            | $\chi_0$             | $+\infty$ |
| $f(x)$ | Ομόσημο του $\alpha$ | Ομόσημο του $\alpha$ |           |

- 3) Αν  $\Delta < 0$  το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και είναι ομόσημο του  $\alpha$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

|        |                      |           |
|--------|----------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$            | $+\infty$ |
| $f(x)$ | Ομόσημο του $\alpha$ |           |

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ**

- Αν οι αριθμοί  $-1$  και  $3$  είναι ρίζες του τριωνύμου  $f(x) = x^2 - kx + \lambda$  ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;  
 Α.  $f(5) < 0$     Β.  $f(-5) \leq 0$     Γ.  $f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$     Δ.  $f(100) \leq 0$   
 Ε.  $f(-100) < 0$
- Αν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) είναι ρίζες του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και  $af(1) < 0$ , ο αριθμός  $1$  ανήκει στο διάστημα:  
 Α.  $(-\infty, \rho_1)$     Β.  $(\rho_1, \rho_2)$     Γ.  $[\rho_1, \rho_2]$     Δ.  $[\rho_2, +\infty)$     Ε.  $(\rho_2, +\infty)$
- Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha > 0$ . Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  έχει 2 ρίζες πραγματικές ετερόσημες, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;  
 Α.  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$     Β.  $\frac{\beta^2}{\alpha} < 4\gamma$     Γ.  $\gamma < 0$     Δ.  $\gamma > 0$     Ε.  $\beta^2 < 4\alpha\gamma$
- Αν  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και  $\Delta < 0$  τότε το τριώνυμο  $f(x)$  γράφεται:  
 Α.  $f(x) = \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$     Β.  $f(x) = \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$     Γ.  $f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$     Δ.  $f(x) = \alpha$   
 Ε.  $f(x) = \alpha \left[ \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]$

**Ερωτήσεις αντιστοίχισης**

- Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

| στήλη (Α)<br>Σχέσεις                                                                               | στήλη (Β)<br>$ax^2 + bx + \gamma > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$<br>$\Delta < 0$ και $\alpha > 0$<br>$\Delta > 0$ και $\alpha \neq 0$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>αληθεύει για κάθε <math>x</math></li> <li>αληθεύει για κάθε <math>x</math> που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου</li> <li>αληθεύει για κάθε <math>x</math> εκτός των ριζών του τριωνύμου</li> <li>δεν αληθεύει για κανένα <math>x</math></li> <li>αληθεύει για <math>x</math> ίσο με τις ρίζες του τριωνύμου</li> <li>δεν μπορούμε να απαντήσουμε για ποια <math>x</math> αληθεύει η ανίσωση</li> </ul> |

• **ΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**

1. Δίνονται τα τριώνυμα:

$$2x^2 + 3x + 1$$

$$-x^2 + 6x - 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$$

α) Ελέγξτε αν καθένα από αυτά έχει δύο ρίζες.

β) Υπολογίστε τις ρίζες.

γ) Τρέψτε τα τριώνυμα αυτά σε γινόμενα.

2. α) Βρείτε το  $\lambda$  έτσι ώστε η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$  να έχει ρίζα το 1. Στη συνέχεια:

β) Βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

γ) Τρέψτε το πρώτο μέλος της εξίσωσης σε γινόμενο.

3. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3}$

β)  $\frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 + x - 12}$

γ)  $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$

δ)  $\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$

ε)  $\frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2}$

στ)  $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

ζ)  $\frac{x^3 + 2ax^2 + ax^2}{ax^2 - a^3}$

4. Συνδέστε με μια γραμμή κάθε τριώνυμο της στήλης Α με την αντίστοιχη παραγοντοποιημένη μορφή του της στήλης Β:

| στήλη Α                                 | στήλη Β                   |
|-----------------------------------------|---------------------------|
| $x^2 + (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$ | $(x - \alpha)(x - \beta)$ |
| $x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$ | $(x + \alpha)(x - \beta)$ |
| $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ | $(x - \alpha)(x + \beta)$ |
| $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ | $(x + \alpha)(x + \beta)$ |
|                                         | $(\alpha - x)(x + \beta)$ |
|                                         | $(\alpha + x)(\beta - x)$ |

5. Οι ρίζες του τριωνύμου  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$  και η παραγοντοποιημένη μορφή του  $(1 - x)(x + 2)$ . Τότε ο  $a$  ισούται με:

A. 1

B. - 1

Γ. 2

Δ. - 2

E. 3

• ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ  $ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

1. Δίνεται το τριώνυμο  $4x^2 + 2x - 1$

- α) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται ίσο με 0;  
β) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται θετικό;  
γ) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται αρνητικό;

2. Το ίδιο για το τριώνυμο  $3x^2 + 3x + 2$ .

3. Για ποιες τιμές του  $x$  καθεμιά από τις παρακάτω ρίζες:

$$\sqrt{2x^2 - 7x + 3}, \quad \sqrt{x^2 - 4x + 4}, \quad \sqrt{x^2 + 9x + 18}, \quad \sqrt{2x^2 - x + 1}$$

έχει έννοια πραγματικού αριθμού;

4. Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .

- α) Ποιες είναι οι ρίζες του;  
β) Όταν το  $x$  μεταβάλλεται από 3 έως 5, το πρόσημο του  $x^2 - 8x + 12$  μεταβάλλεται;  
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α)  $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$  β)  $-x^2 + 4x - 4 > 0$  γ)  $-x^2 + x - 1 < 0$  δ)  $2x^2 + x - 15 > 0$   
ε)  $5x^2 + 3x - 2 < 3x^2 - 2x + 10$  στ)  $6x^2 - 8 < 2x^2 - 3x + 2$  ζ)  $x^2 + 1 > 0$   
η)  $4x^2 + 5 > 0$

6. Ναδειχθεί ότι η ανίσωση  $x^2 + 6ax + 9a^2 + 4 > 0$  αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

7. Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu$  για τις οποίες το τριώνυμο  $(\mu - 5)x^2 - 3x + 4$  είναι θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

8. Αν το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + bx + c$  έχει  $\Delta < 0$ , ποια από τις παρακάτω ανισώσεις αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ ;

A.  $f(x) < 0$       B.  $-3f(x) \geq 0$       Γ.  $(x^2 + 1) \cdot f(x) > 0$

Δ.  $\frac{f(x)}{x^2 + 1} < 0$       Ε.  $\frac{f(x)}{x^2 + 1} \leq 0$

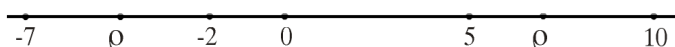
9. Το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 6.

Ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

A.  $f(0, 1999) > 0$       B.  $f(0, 1999) \geq 0$       Γ.  $f(1999) < 0$   
Δ.  $f(1999) \leq 0$       Ε.  $f(-1999) > 0$

10. Στον παρακάτω άξονα είναι τοποθετημένες οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  της εξίσωσης

$$-x^2 + bx + c = 0 \text{ και οι αριθμοί } -7, -2, 5, 10.$$



Αν  $f(x) = -x^2 + bx + c$  να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο ( $>$ ) ή ( $<$ ) στα παρακάτω κενά:

|         |       |   |         |       |         |
|---------|-------|---|---------|-------|---------|
| $f(-7)$ | ..... | 0 | $f(-2)$ | ..... | 0       |
| $f(5)$  | ..... | 0 | $f$     | (10)  | ..... 0 |
|         |       |   |         |       |         |

• ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

1. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 - 8 < 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 5x + 6 > 0$$

2. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 2x < -3$$

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$x - 2 > 0$$

3. Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει η διπλή ανίσωση:

$$-3 < -x^2 + 2x + 3 < 0$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

1. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α)  $3x + 7 > 0$    β)  $x^2 - 6x + 5 > 0$

2. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α)  $2x + 5 > 0$    β)  $x - 2 < 0$    γ)  $(x + 4)(x - 6) < 0$

3. Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο  $x^2 - 14x + 50$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

4. Να λυθεί η ανίσωση:  $|x| > 4x$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$  δεν έχει ρίζες πραγματικές.

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$  έχει ετερόσημες ρίζες.

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , το τριώνυμο  $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda$ ,  $\lambda \neq 0$  είναι αρνητικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

9. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + (\lambda + 3)x + 6 + \lambda = 0$ .

α) να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$ , η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) αν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:

$$x_1^2 + x_2^2 < 42$$