

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

A) ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ:

1) ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ: Είναι το πείραμα στο οποίο το αποτέλεσμα δεν είναι εκ των προτέρων προβλέψιμο παρότι εκτελείται στις ίδιες ακριβώς συνθήκες.

2) ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ: Είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

3) ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΕΝΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΤΥΧΗΣ: Είναι υποσύνολο του Ω ($A \subseteq \Omega$)

Αν $A = \{\omega_i\}$ τότε το A λέγεται απλό ενδεχόμενο αν έχει περισσότερα στοιχεία λέγεται σύνθετο.

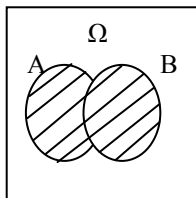
Αν $A = \Omega$ τότε λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Αν $A = \emptyset$ τότε λέγεται αδύνατο.

4) ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ:

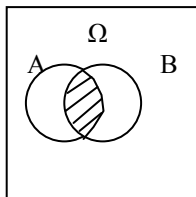
Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω

α) Ένωση: $A \cup B$



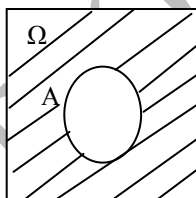
$A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A, B

β) Τομή: $A \cap B$



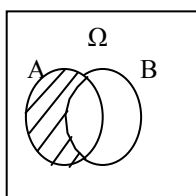
$A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα A, B

γ) Συμπληρωματικό του A είναι το A'



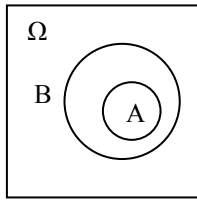
Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A.

δ) $A - B = A \cap B'$



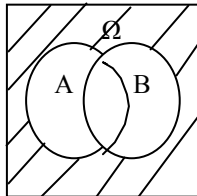
Πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B

ε) $A \subseteq B$



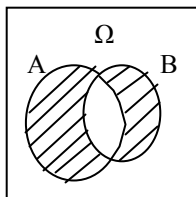
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B

στ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$



Το $(A \cup B)' = A' \cap B'$ πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B

ζ) $(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$



Το $(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B δηλαδή να πραγματοποιείται το A και όχι το B ή πραγματοποιείται το B και όχι το A

η) Ιδιότητες

i) $A \cup \Omega = \Omega$ ii) $A \cap \Omega = A$ iii) $A \cup A' = \Omega$ iv) $A \cap A' = \emptyset$ v) $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$

ζ) Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: είναι τα ενδεχόμενα που η τομή τους είναι το κενό δηλαδή δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως.

Β) ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

1) Κλασικός ορισμός : (χρησιμοποιείται σε δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα ενδεχόμενα)

Έστω δειγματικός χώρος Ω και ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$

$$\text{Τότε : } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις του } A}{\text{δυνατές περιπτώσεις}}$$

2) Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$ έτσι ώστε να ισχύουν : i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ και ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα

$P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδυνάτου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ: Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και χρησιμοποιούμε την φράση

«παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω » εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

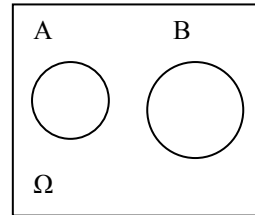
Γ) Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

1) Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$ τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία γιατί αλλιώς τα A και B δεν θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως : } P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B). \end{aligned}$$



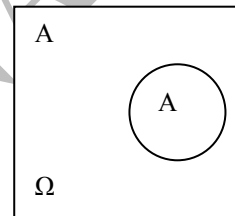
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε : $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2) Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει ότι:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \\ P(\Omega) &= P(A) + P(A') \\ 1 &= P(A) + P(A') \\ \text{οπότε: } P(A') &= 1 - P(A) \end{aligned}$$



3) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για δύο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ (1)
αφού το άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δύο φορές.

αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \text{ και επομένως :}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος**.

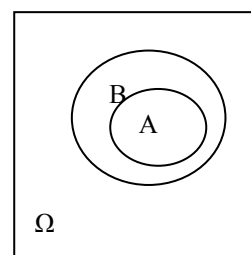
4) Ισχύει ότι:

$$\text{Αν } A \subseteq B, \text{ τότε: } P(A) \leq P(B)$$

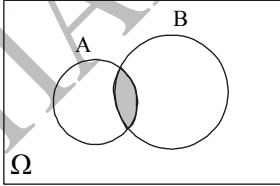
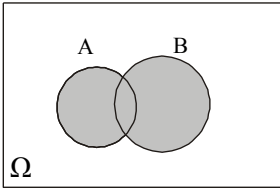
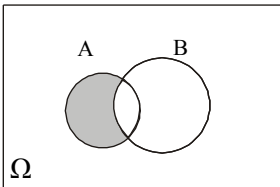
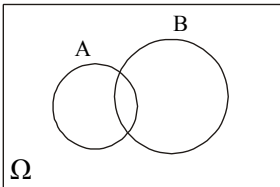
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} N(A) &\leq N(B) \\ \frac{N(A)}{N(\Omega)} &\leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ P(A) &\leq P(B) \end{aligned}$$



Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1. Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε $P(\Omega) = 1$. | Σ | Λ | |
| 2. Αν A είναι ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης τότε $0 \leq P(A) \leq 1$. | Σ | Λ | |
| 3. Για το αδύνατο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ισχύει $P(\emptyset) = 0$. | Σ | Λ | |
| 4. Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. | Σ | Λ | |
| 5. Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου του πειράματος. | Σ | Λ | |
| 6. Ένα αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγεται απλό ενδεχόμενο ή γεγονός. | Σ | Λ | |
| 7. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι βέβαιο ενδεχόμενο. | Σ | Λ | |
| 8. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε ονομάζουμε ενδεχόμενο του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω . | Σ | Λ | |
| 9. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι και αυτός ένα ενδεχόμενο. | Σ | Λ | |
| 10. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για ένα ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης είναι στοιχεία του δειγματικού του χώρου. | Σ | Λ | |
| 11. Με $N(A)$ συμβολίζουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός ενδεχομένου A . | Σ | Λ | |
| 12. Το συμπλήρωμα A' οποιουδήποτε ενδεχομένου A ενός πειράματος τύχης είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του πειράματος. | Σ | Λ | |
| 13. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $A \cup B$. |  | Σ | Λ |
| 14. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $A \cup B$. |  | Σ | Λ |
| 15. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $B - A$. |  | Σ | Λ |
| 16. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω , τότε ισχύει η ισότητα $A - B = A \cap B'$. | Σ | Λ | |
| 17. Αν A, B ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω τότε ισχύει η ισότητα $B \cup A = (B - A) \cup (A - B)$. | Σ | Λ | |
| 18. Στο διπλανό σχήμα τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα. |  | Σ | Λ |
| 19. Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = A$. | Σ | Λ | |

20. Τα ενδεχόμενα $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{4, 7, 11\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.
21. Αν το ενδεχόμενο $B = \{2, 4, 6\}$, τότε $N(B) = 3$.
22. Αν A είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε μια ντάμα από μια τράπουλα, τότε $N(A) = 2$.
23. Οι εκφράσεις: «πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A ή το B » και «πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B » είναι ισοδύναμες.
24. Το κενό σύνολο δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος τύχης.
25. Το κενό σύνολο είναι βέβαιο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης.
26. Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν τουλάχιστον δύο αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγονται σύνθετα.
27. Ενδεχόμενα τα οποία περιέχουν ένα μόνο αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης λέγονται απλά ενδεχόμενα.
28. Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος $f_A = \frac{k}{n}$ λέγεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου.
29. Για τη σχετική συχνότητα f_A ενός ενδεχομένου A ισχύει $f_A > 1$
30. Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και δειγματικό χώρο Ω η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι ο αριθμός $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$.

Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ
Σ	Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ρίχνουμε μια φορά έναν κύβο ο οποίος έχει καθέναν από τους αριθμούς 1, 2, 3 γραμμένους αντίστοιχα ανά δύο έδρες του και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι
 Α. $\Omega = \{3\}$. Β. $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Γ. $\Omega = \{1,1, 2,2, 3,3\}$.
 Δ. $\Omega = \{1,1, 1,2, 1,3, 2,1, 2,2, 2,3, 3,3\}$. Ε. $\{1,2, 2,1, 1,3, 3,1\}$.
2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δυο φορές. Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος αυτού είναι
 Α. $\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$. Β. $\Omega = \{ΚΓ, ΓΚ\}$.
 Γ. $\Omega = \{ΓΚ, ΚΓ\}$. Δ. $\Omega = \{KK, ΓΓ\}$. Ε. κανένα από τα παραπάνω.
3. Ελέγχουμε διαδοχικά βιβλία μέχρι να βρούμε ένα κακοτυπωμένο (Κ) ή δύο σωστά τυπωμένα (Σ). Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος είναι
 Α. $\Omega = \{K, \Sigma\}$. Β. $\Omega = \{KK, K\Sigma\}$. Γ. $\Omega = \{KK, \Sigma\Sigma\}$ Δ. $\Omega = \{K, \Sigma K, \Sigma\Sigma\}$ Ε. $\{K, \Sigma\Sigma\}$.
4. Έστω $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$ δύο ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού μια φορά. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 3 τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο
 Α. $A \cup B$. Β. A' . Γ. B . Δ. $A \cap B$. Ε. $B' \cap A'$.
5. Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και a ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η φράση «το A πραγματοποιείται» διατυπωμένη σε γλώσσα συνόλων είναι ισοδύναμη με την
 Α. $a \in A'$. Β. $a \in A' - B$. Γ. $a \in A' \cup B$ Δ. $a \in A$. Ε. κανένα από τα παραπάνω.
6. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει
 Α. $P(A) + P(A') = 0$. Β. $P(A) + P(A') = 2$.
 Γ. $P(A) + P(A') = 1$. Δ. $P(A) = -P(A')$. Ε. κανένα από τα παραπάνω.

7. Το ενδεχόμενο A να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 6 κατά τη ρίψη ενός συνήθους ζαριού μια φορά είναι
A. $A = \{1,3,5\}$. **B.** $A = \{x: x \geq 6\}$. **Γ.** $A = \{2,4,6\}$. **Δ.** $A = \{x: x > 6\}$. **Ε.** $A = \emptyset$.
8. Αν f_A η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου A τότε
A. $1 < f_A < 2$. **B.** $f_A > 1$. **Γ.** $f_A < 0$. **Δ.** $0 \leq f_A \leq 1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.
9. Από τις παρακάτω ισότητες **σωστή** είναι η
A. $A \cap \emptyset = A$. **B.** $A' \cap A = \Omega$. **Γ.** $A \cap B = A \cup B$. **Δ.** $\Omega' = \Omega$. **Ε.** $(A')' = A$.
10. Αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό στις ρίψεις ενός αμερόληπτο ζαριού, τότε η συχνότητα εμφάνισής του αναμένεται να είναι
A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **Γ.** $\frac{1}{2}$. **Δ.** $\frac{1}{3}$. **Ε.** 1.
11. Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ με ισοπίθανα ενδεχόμενα. Η πιθανότητα $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, ενός στοιχείου του Ω είναι
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{k}$. **Γ.** k . **Δ.** 1. **Ε.** $\frac{1}{2k}$.
12. Για την πιθανότητα $P(A)$ κάθε ενδεχομένου A ενός πειράματος τύχης ισχύει
A. $1 < P(A) < 2$. **B.** $P(A) > 1$. **Γ.** $P(A) < 0$.
Δ. $0 \leq P(A) < 1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.
13. Ο απλός προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B είναι
A. $P(A) + P(B) = P(A \cap B)$. **B.** $P(A) + P(B') = P(A \cup B)$.
Γ. $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. **Δ.** $P(A) - P(B) = P(A \cup B)$.
Ε. $P(A)P(B) = P(A \cup B)$.
14. Ο προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων για δύο ενδεχόμενα A και B είναι ισοδύναμος με την ισότητα
A. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. **B.** $P(A \cup B) = P(A) - [P(B) + P(A \cap B)]$.
Γ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A' \cap B')$. **Δ.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.
Ε. κανένα από τα παραπάνω.
15. Η έκφραση: «η **πραγματοποίηση του ενδεχομένου A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B** » διατυπωμένη στη γλώσσα των συνόλων είναι ισοδύναμη με την σχέση
A. $B \subseteq A$. **B.** $N(A) \geq N(B)$. **Γ.** $P(A) + P(B) = 2$. **Δ.** $A \cup B = \emptyset$. **Ε.** $A \cap B = A$.
16. Αν δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ικανοποιούν την συνολοθεωρητική σχέση $A \subseteq B$, τότε
A. $P(A) > P(B)$. **B.** $\frac{P(A)}{P(B)} < 0$. **Γ.** $P(A) \leq P(B)$.
Δ. $P(A) + P(B) = -1$. **Ε.** κανένα από τα παραπάνω.
17. Αν A, B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα με $P(A) = 0,4$ και $P(B) = 0,6$ τότε ισχύει
A. $P(A \cap B) = 1$. **B.** $P(A \cup B) = 1$. **Γ.** $P(A \cap B) = 0,2$.
Δ. $P(A \cup B) = 0,4$. **Ε.** $P(A \cup B) = 0,6$.
18. Αν $A \subseteq B$ (A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω), τότε **δεν** ισχύει
A. $P(A) = 0,3$ και $P(B) = 0,7$. **B.** $P(B') + P(B) = 1$.
Γ. $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,4$. **Δ.** $P(A) + P(A') = 1$.
Ε. $P(A) = 0,5$ και $P(B) = 0,5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Ρίχνουμε πρώτα ένα νόμισμα μετά ένα ζάρι και καταγράφουμε τα αποτελέσματα. Περιγράψτε ένα δειγματικό χώρο του πειράματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Δύο χάρτινες σακούλες περιέχουν φρούτα. Η πρώτη περιέχει 1 μήλο (Μ), 1 πορτοκάλι (Π) και 1 αχλάδι (Α). Η δεύτερη περιέχει 1 μήλο και 1 αχλάδι. Επιλέγουμε στην τύχη μία σακούλα και στη συνέχεια ένα φρούτο από αυτή. Να γραφούν: α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
β) Το ενδεχόμενο το φρούτο να είναι μήλο. γ) Το ενδεχόμενο να είναι πορτοκάλι.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Σ' ένα κουτί υπάρχουν 4 ομοιόμορφα μολύβια 1κόκκινο (Κ), 1 πράσινο (Π), 1μαύρο (Μ), 1λευκό(Λ). Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος στις ακόλουθες περιπτώσεις: (μας ενδιαφέρει το χρώμα)
α) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι.
β) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι, το τοποθετούμε ξανά στο κουτί και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (επανατοποθέτηση).
γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μολύβι και μετά επιλέγουμε άλλο ένα (χωρίς επανατοποθέτηση).

ΑΣΚΗΣΗ 4: Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A, (B \cap A^c)$ είναι ασυμβίβαστα.

ΑΣΚΗΣΗ 5: Μια δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα compact disks (CD) που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD. Να βρείτε: α) Το δειγματικό χώρο Ω .
β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς 2 ελαττωματικά CD, ii) Τουλάχιστον 2 ελαττωματικά CD, iii) το πολύ 2 ελαττωματικά CD.

ΑΣΚΗΣΗ 6: Δύο ομάδες O_1, O_2 παίζουν μεταξύ τους σε μια σχολική ποδοσφαιρική συνάντηση (οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να βρείτε:
α) Το δειγματικό χώρο Ω των αποτελεσμάτων των αγώνων της συνάντησης.
β) Τα ενδεχόμενα: i) Ακριβώς μία νίκη της ομάδας O_1 , ii) Καμία νίκη της ομάδας O_1 iii) τουλάχιστον μία νίκη της ομάδας O_1 .
γ) Πόσους αγώνες το πολύ θα είχε μία τέτοια ποδοσφαιρική συνάντηση;
δ) Τι παρατηρείτε για τα ενδεχόμενα β(ii) και β(iii);

ΑΣΚΗΣΗ 7: Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα.
α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
β) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα:
 $A = \{\text{να παρουσιαστεί Κ (κεφαλή) στην πρώτη ρίψη}\},$
 $B = \{\text{να παρουσιαστεί Κ στη δεύτερη ρίψη}\},$
 $\Gamma = \{\text{να παρουσιαστεί Κ σε μία μόνο από τις δύο ρίψεις}\}.$
γ) Είναι τα ενδεχόμενα A, B, Γ ανά δύο ασυμβίβαστα; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

ΑΣΚΗΣΗ 8 : Θεωρούμε ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύουν

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A') = \frac{2}{3} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{4}. \text{ Να βρείτε τις: α) } P(A) \text{ β) } P(B).$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 : Ρίχνοντας ένα ζάρι ποια πιθανότητα είναι μεγαλύτερη να φέρουμε 5 ή να μη φέρουμε 5;

ΑΣΚΗΣΗ 10: I) Αποδείξτε με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn ότι:

$$\alpha) (A \cap B') \cup (A \cap B) = A, \quad \beta) (A \cap B') \cap (A \cap B) = \emptyset, \\ \gamma) P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A).$$

$$\text{II) Αν } P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{2}{3}, \text{ τότε βρείτε τις πιθανότητες} \\ P(A \cap B') \text{ και } P(A' \cap B).$$

ΑΣΚΗΣΗ 11: Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$ και

$$P(A' \cap B) = \frac{1}{3}. \text{ Υπολογίστε τις πιθανότητες: α) } P(A \cap (A' \cap B)), \beta) P(A \cup (A' \cap B))$$

Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διάγραμμα Venn.

ΑΣΚΗΣΗ 12: Το σύνολο $A = \{20^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ\}$ περιέχει σαν στοιχεία μέτρα γωνιών. Επιλέγουμε τυχαία και ταυτόχρονα τρία στοιχεία του A. Ποια η πιθανότητα αυτά να είναι μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 13: Ρίχνουμε ένα ζάρι και κατόπιν παίρνουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Ποια είναι η πιθανότητα το ζάρι να δείξει τον αριθμό 5 και το τραπουλόχαρτο να είναι : α) 5 σπαθί; β) 5 οποιουδήποτε είδους;

ΑΣΚΗΣΗ 14: Υψώνουμε ένα τυχαίο μονοψήφιο ακέραιο αριθμό (διάφορο του 0) στο τετράγωνο. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο: α) Το 1, β) το 4, γ) το 1 ή το 4, δ) το 2.

ΑΣΚΗΣΗ 15: Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς

$$\text{του συνόλου } A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}. \text{ Ποια η πιθανότητα οι δύο αυτοί}$$

αριθμοί να είναι ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας φ ;

ΑΣΚΗΣΗ 16: Ρίχνουμε ένα μη συμμετρικό ζάρι για το οποίο έχουμε την πληροφορία ότι φέρνει ζυγά νούμερα δύο φορές συχνότερα από ότι φέρνει μονά. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε μονό νούμερο.

ΑΣΚΗΣΗ 17: Σε μία τάξη υπάρχουν 20 αγόρια και 9 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{4}$ και από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ είναι άριστοι στα μαθηματικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

Ποια η πιθανότητα:

- A) Να μην είναι άριστος στα μαθηματικά B) Να είναι κορίτσι
- Γ) Να είναι κορίτσι άριστο στα μαθηματικά
- Δ) Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 18: Μία τάξη έχει 12 αγόρια και 16 κορίτσια. Τα μισά αγόρια και τα μισά κορίτσια έχουν μαύρα μάτια. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

ΑΣΚΗΣΗ 19: Σε μία έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων το 20% δεν έχει μηχανή το 40% δεν έχει λάστιχα και το 15% δεν έχει ούτε μηχανή ούτε λάστιχα. Να βρείτε την πιθανότητα ένα αυτοκίνητο που επιλέχθηκε τυχαία να έχει και λάστιχα και

μηχανή.

ΑΣΚΗΣΗ 20: Μία μέρα με άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργούν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30% . Η πιθανότητα να μην λειτουργούν τα τραίνα είναι 40 % και η πιθανότητα να λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα δύο μέσα είναι 90%. Ποια η πιθανότητα να λειτουργούν συγχρόνως και τα δύο μέσα ;

ΑΣΚΗΣΗ 21: Μία τάξη της Γ' Λυκείου έχει 40 παιδιά . Τα $\frac{3}{5}$ των αγοριών και το $\frac{1}{5}$ των κοριτσιών επέλεξαν την θετική κατεύθυνση , ενώ όλα τα υπόλοιπα παιδιά επέλεξαν την θεωρητική ή την τεχνολογική κατεύθυνση. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Αν η πιθανότητα το άτομο να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει τη θετική κατεύθυνση είναι $\frac{3}{8}$, τότε:

α) Να βρείτε τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου :

$B = \{ \text{Το άτομο είναι κορίτσι ή να επέλεξε την θετική κατεύθυνση} \}$

ΑΣΚΗΣΗ 22: Ένα κουτί περιέχει 36 μπάλες , άσπρες , κόκκινες και μαύρες . Παίρνουμε στην τύχη μία μπάλα . Η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη , κόκκινη ή μαύρη είναι αντίστοιχα $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$. Να βρείτε πόσες άσπρες , κόκκινες και μαύρες μπάλες περιέχει το κουτί.

ΑΣΚΗΣΗ 23: Ένα κουτί έχει 10 άσπρες , χ κίτρινες και ψ μαύρες μπάλες . Αν η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{6}$, τότε:

ι) Πόσες μπάλες έχει το κουτί;

ii) Ποια η πιθανότητα επιλέγοντας μία μπάλα από το κουτί να μην είναι μαύρη;

ΑΣΚΗΣΗ 24: Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω με 24 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έστω A ένα ενδεχόμενο του Ω . Αν ισχύει ότι $P^3(A) + P^3(A') = \frac{1}{3}$, Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του A .

ΑΣΚΗΣΗ 25: Για τρία ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:

α) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ (με την βοήθεια του διαγράμματος Venn)

β) $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$

ΑΣΚΗΣΗ 26: Αν A, B , ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν : $P(A') \leq \alpha$ και $P(B) \geq \beta$ με $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι ισχύει : $\beta - \alpha \leq P(A \cap B) - P(A' \cap B')$

ΑΣΚΗΣΗ 27: Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ να δείξετε ότι: α) $P(A' \cap B) = P(A')P(B)$ β) $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

ΑΣΚΗΣΗ 28: Αν A ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι:

$$|P(A) + 2| - |P(A) - 3| = 8\mu \text{ να δείξετε ότι: } |\mu| \leq \frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29: Αν A ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν α, β είναι αντίστοιχα η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο οποίος ικανοποιεί την

$$\text{σχέση } |P(A) - 3| - |P(A) + 2| = 2\lambda - 7$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B: επιλέγοντας τυχαία έναν αριθμό $\chi \in K = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ αυτός να αποτελεί ρίζα της εξίσωσης: $\chi^2 + 3 = \alpha\beta$.

ΑΣΚΗΣΗ 30: Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:

$$\alpha) 0 \leq P(A)P(A') \leq \frac{1}{4} \quad \beta) \frac{1}{2} \leq [P(A)]^2 + [P(A')]^2 \leq 1 \text{ και}$$

$$\gamma) P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + P(A' \cap B').$$

ΑΣΚΗΣΗ 31: Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τέτοια ώστε :

$$P(A') \leq 0,28 \text{ και } P(B') \leq 0,71. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

$$\alpha) P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B), \text{ και } \beta) A \cap B \neq \emptyset.$$

ΑΣΚΗΣΗ 32: Έστω A, B ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης, με $P(A) = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ και $P(B) = \frac{1}{\lambda}$

όπου $\lambda \in (1, +\infty)$. Να δείξετε ότι: i) Τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

$$\text{ii) } P(A \cap B) \leq \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{2 \cdot (\lambda^2 + \lambda)} \quad \text{iii) } P(A - B) \geq \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{2 \cdot (\lambda^2 + \lambda)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33: Αν P(A) και P(B) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $12\chi^2 - 17\chi + 6 = 0$ και ισχύει ότι:

$P(A) < P(B)$ τότε α) να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

$$\beta) \text{ Να δείξετε ότι: } \frac{5}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 34: Ρίχνουμε ένα μη συμμετρικό ζάρι και έστω $P(\omega_i)$ για $i=1,2,3,4,5,6$ η πιθανότητα

να εμφανιστεί η έδρα i μετά από κάθε ρίψη. Αν οι αριθμοί $P(\omega_1), P(\omega_2),$

$P(\omega_3), P(\omega_4), P(\omega_5), P(\omega_6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και

οι αριθμοί $P(\omega_3), P(\omega_5), P(\omega_6)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

τότε να υπολογίσετε: α) τους αριθμούς $P(\omega_i)$ για $i=1,2,3,4,5,6$ και

β) τις πιθανότητες των ενδεχομένων A: η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός

και B: εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 3.

ΑΣΚΗΣΗ 35: Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Αν ισχύουν $P(\alpha) = 3\lambda^2$, $P(\beta) = 4\lambda - 1$

και $P(\gamma) = 7\lambda - 2$, να υπολογίσετε το λ .

ΑΣΚΗΣΗ 36: Ρίχνουμε ένα μη συμμετρικό ζάρι και έστω $P(\omega_i)$ για $i=1,2,3,4,5,6$ η πιθανότητα

να εμφανιστεί η έδρα i μετά από κάθε ρίψη. Αν για τους αριθμούς $P(\omega_1),$

$P(\omega_2), P(\omega_3), P(\omega_4), P(\omega_5), P(\omega_6)$ ισχύουν ότι: $P(\omega_1) = P(\omega_3) = P(\omega_5)$ και

$3P(\omega_2) = 3P(\omega_4) = 3P(\omega_6) = 2P(\omega_1)$ τότε να υπολογίσετε:

α) τους αριθμούς $P(\omega_i)$ για $i=1,2,3,4,5,6$

β) τις πιθανότητες των ενδεχομένων A: η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός

και B: εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 3.

γ) Υποθέτουμε ότι ο αριθμός λ ορίζεται ως εξής: ο λ παίρνει την τιμή 1 αν η

ένδειξη είναι περιττός, ο λ παίρνει την τιμή 2 αν ο λ παίρνει την τιμή 6,

ο λ παίρνει την τιμή 0 σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\lambda=0), P(\lambda=1), P(\lambda=2)$.