

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

$$\frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma}$$

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \alpha}_{\nu\text{-φορές}}$$

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$$

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

$$A = \frac{a^3}{\sqrt[8]{a^3}}$$

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΟΚΑΝΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

1.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

- **Ρητός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι σε μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$. Όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί και οι περιοδικοί δεκαδικοί μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος (π.χ. $3,567 = \frac{3567}{1000}$, $1,23 = \frac{123}{100}$, $1,\overline{64} = \frac{163}{99}$). Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ που αποδεικνύεται ότι δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ με α, β ακέραιους και ονομάζονται **άρρητοι**.
- **Πραγματικός αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός που είναι είτε ρητός είτε άρρητος. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με το $\mathbb{R}$. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζονται οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός των οποίων οι ιδιότητες αναφέρονται στο παρακάτω πίνακα.

Ιδιότητα	Πράξη	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική		$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική		$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
επιμεριστική		$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	
		$\alpha + 0 = \alpha$	$a \cdot 1 = a$
		$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$

- Ο αριθμός 0 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**. Ο αριθμός 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**. Οι αριθμοί α και $-\alpha$ που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι**, ενώ οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$ με $\alpha \neq 0$ που έχουν γινόμενο 1 λέγονται **αντίστροφοι**.
- **Αφαίρεση**
Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α, β . Τότε ορίζουμε ως διαφορά του β από το α το άθροισμα του α με τον αντίθετο του β , δηλαδή $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Η πράξη με την οποία βρίσκουμε την διαφορά λέγεται **αφαίρεση**.
- **Διαίρεση**
Για να βρούμε το πηλίκο $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε τον α με τον αντίστροφο του β . Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το πηλίκο λέγεται **διαίρεση**.

➤ **Επιπλέον ιδιότητες**

$$* \text{Αν } \alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta \text{ τότε } \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + \delta \\ \alpha \gamma = \beta \delta \end{cases} \quad (\text{πρόσθεση και πολλαπλασιασμός κατά μέλη δύο ισοτήτων})$$

$$* \text{Αν } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ θα συνδέει δύο ισχυρισμούς (π.χ. ισότητες, ανισότητες) μόνο στην περίπτωση που, όταν αληθεύει ο πρώτος ισχυρισμός αληθεύει και ο δεύτερος και αντιστρόφως, όταν αληθεύει ο δεύτερος αληθεύει και ο πρώτος.

$$* \text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \gamma = \beta \gamma$$

$$* \alpha \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

$$* \alpha \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Η έκφραση $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ σημαίνει ότι **ένας τουλάχιστον** από τους α, β είναι μηδέν,

ενώ η έκφραση $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ σημαίνει ότι **ταυτόχρονα** και ο α και ο β είναι μη μηδενικοί.

➤ **Κανόνας των προσήμων**

$$(-1)\alpha = -\alpha$$

$$(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$$

$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$$

➤ **Κανόνας απαλοιφής παρενθέσεων**

$$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta \quad \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}, \quad \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

➤ **Λογισμός με κλασματικές παραστάσεις**

$$\frac{\alpha \pm \beta}{\gamma} = \frac{\alpha \pm \beta}{\gamma} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta} \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

➤ **Ιδιότητες αναλογιών**

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, τότε έχουμε:

$$1) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$2) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$3) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$$

$$4) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Δυνάμεις – Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση

- **Δύναμη** ενός πραγματικού αριθμού α με εκθέτη θετικό ακέραιο n ονομάζουμε τον αριθμό $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n-\text{φορές}}$

$$\text{Αν } \alpha \neq 0 \text{ ορίζουμε } \begin{cases} \alpha^1 = 1 \\ \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} \end{cases}$$

- **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ** : Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και εκθέτη ακέραιο

$$1) \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

$$2) \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu} \quad \alpha \neq 0$$

$$3) (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$$

$$4) \alpha^\mu \cdot \beta^\mu = (\alpha \cdot \beta)^\mu$$

$$5) \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\mu \quad \beta \neq 0$$

- **ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**

$$1) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$2) (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$3) (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$4) (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$5) (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$6) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$7) \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$8) \alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

$$9) (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$$

$$10) x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

$$11) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$12) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$13) \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$$

➤ **ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ****1) Κοινός παράγοντας**

Αν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα, το πολυώνυμο αυτό μετατρέπεται σε γινόμενο σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\text{Π.χ. } \mu\alpha + \mu\beta - \mu\gamma = \mu(\alpha + \beta - \gamma) \quad 15 - 3\chi = 3(5 - \chi) \quad 4x^3y^2 - 2x^2y = 2x^2y(2xy - 1)$$

2) Ομαδοποίηση

Αν δεν έχουν όλοι οι όροι κοινό παράγοντα αλλά έχουν σε ομάδες, βγάζουμε τον κοινό παράγοντα σε κάθε ομάδα, αλλά πρέπει στο τέλος να υπάρχει κάποια κοινή παρένθεση.

$$\text{Π.χ. } \alpha\chi + \alpha\gamma + \beta\chi + \beta\gamma = \alpha(\chi + \gamma) + \beta(\chi + \gamma) = (\alpha + \beta)(\chi + \gamma)$$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2(\alpha + 1) + (\alpha + 1) = (\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)$$

3) Διαφορά τετραγώνων

Από την ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ έχουμε:

$$9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$$

$$(2x + 1)^2 - 81y^2 = ((2x + 1) - 9y)((2x + 1) + 9y)$$

4) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Από την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\alpha^2 + 10\alpha + 25 = \alpha^2 + 2 \cdot 5\alpha + 5^2 = (\alpha + 5)^2$$

$$4\alpha^2 - 28\alpha\beta + 49\beta^2 = (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 7\beta + (7\beta)^2 = (2\alpha - 7\beta)^2$$

5) Τριώνυμο

Από την ταυτότητα $x^2 + (a + \beta)x + a\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

$$\chi^2 + 3\chi - 10 = (\chi + 5)(\chi - 2)$$

$$\chi^2 + 5\chi + 6 = (\chi + 2)(\chi + 3)$$

1.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών➤ **Ορισμοί**

Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον β όταν και μόνο όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Ο αριθμός α είναι μικρότερος από τον β όταν και μόνο όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός. Δηλαδή $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

➤ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ:**

$$1) \left. \begin{array}{l} a > \beta \\ \beta > \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow a > \gamma \quad (\text{Μεταβατική ιδιότητα})$$

$$2) \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

$$3) \text{ για } \gamma > 0 \text{ ισχύει : } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$$

$$4) \text{ για } \gamma < 0 \text{ ισχύει : } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$$

$$5) \left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta \quad (\text{Μπορούμε να προσθέσουμε ομοιότροφες ανισότητες})$$

$$6) \left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν διαιρούμε, ούτε αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη!

7) Για θετικούς α, β και n φυσικό, $n \neq 0$ ισχύουν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$$

$$8) \text{ Αν } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι, τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

$$9) \text{ Αν } \alpha > 0 \text{ τότε } \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$$

$$10) \text{ Αν } \alpha < 0 \text{ τότε } \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$$

$$11) \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$12) \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

➤ **ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ**

Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} / \alpha \leq x \leq \beta\}$ λέγεται κλειστό διάστημα από το α μέχρι το β και συμβολίζεται $[\alpha, \beta]$. Δηλαδή $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} / \alpha \leq x \leq \beta\}$

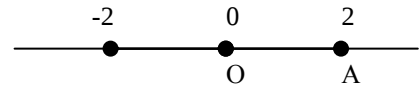
Αν από το $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α, β προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β που συμβολίζεται (α, β) .

Δηλαδή $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} / \alpha < x < \beta\}$

1.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

➤ **Ορισμός**

Έστω a ένας αριθμός ο οποίος παριστάνεται σ' έναν άξονα με το σημείο A . Απόλυτη τιμή του a λέγεται η απόσταση του A από την αρχή O του άξονα (δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA) και συμβολίζεται με $|a|$



π.χ. $|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$

Παρατηρούμε ότι $|a| = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ -a & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

➤ **Ιδιότητες**

Για κάθε αριθμό a ισχύουν:

$$1) |a| \geq 0, \quad |a|^2 = a^2, \quad |a| = |-a|$$

$$2) |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } |a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

$$3) |a| \geq a \text{ και } |a| \geq -a \text{ οπότε } -|a| \leq a \leq |a|$$

$$4) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$5) \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$6) |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{Γενικά} \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

➤ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

$$1) \text{ Αν } \theta \geq 0 \text{ τότε } |x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$$

Αν $\theta < 0$ τότε η εξίσωση $|x| = \theta$ είναι αδύνατη αφού
θετικός ή μηδέν = αρνητικός

$$2) |x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$$

➤ **ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**

$$1) \text{ Αν } \theta > 0 \text{ τότε } |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \quad (|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta)$$

Αν $\theta \leq 0$ τότε η ανίσωση $|x| < \theta$ είναι αδύνατη αφού
θετικός ή μηδέν < αρνητικού

$$2) \text{ Αν } \theta > 0 \text{ τότε } |x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta \quad (|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta)$$

Αν $\theta \leq 0$ τότε η ανίσωση $|x| > \theta$ είναι ταυτότητα (ισχύει πάντα) αφού
θετικός ή μηδέν > αρνητικού

➤ Παρατηρήσεις

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

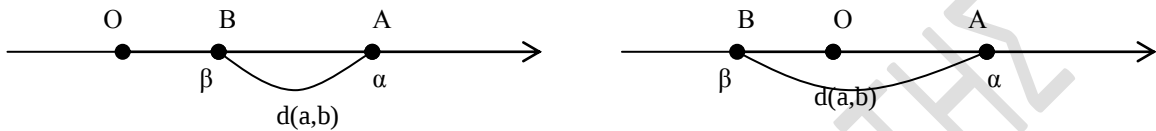
$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } \alpha_n \neq 0$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| > 0 \Rightarrow \alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } \alpha_n \neq 0$$

➤ Απόσταση δύο σημείων

Η απόσταση δύο σημείων συμβολίζεται με $d(a,b)$ ή με $d(b,a)$ και είναι ίση με

$$|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|. \text{ Δηλαδή } d(a,b) = |\alpha - \beta|$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να λυθεί η εξίσωση $2|x| + 3|x-1| = 8$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+

1. Για $x \in (-\infty, 0)$ $|x| = -x$ και $|x-1| = -x+1$

$$\text{Άρα } 2|x| + 3|x-1| = 8 \Leftrightarrow -2x - 3x + 3 = 8 \Leftrightarrow -5x = 5 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (δεκτή)}$$

2. Για $x \in [0, 1)$ $|x| = x$ και $|x-1| = -x+1$

$$\text{Άρα } 2|x| + 3|x-1| = 8 \Leftrightarrow 2x - 3x + 3 = 8 \Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5 \text{ (απορρίπτεται)}$$

3. Για $x \in [1, +\infty)$ $|x| = x$ και $|x-1| = x-1$

$$\text{Άρα } 2|x| + 3|x-1| = 8 \Leftrightarrow 2x + 3x - 3 = 8 \Leftrightarrow 5x = 11 \Leftrightarrow x = 11/5 \text{ (δεκτή)}$$

$$\text{Άρα } x=1 \text{ ή } x=11/5$$

1.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ Ορισμός νιοστής ρίζας:

Η νιοστή ρίζα (n θετικός αριθμός) ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στην n , δίνει a . Δηλαδή αν $a \geq 0$, η $\sqrt[n]{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $X^n = a$

$$\text{Επίσης γράφουμε } \sqrt[n]{a} = a \text{ και } \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Είναι $\sqrt{9} = 3$ διότι $3^2 = 9$. Επίσης και $(-3)^2 = 9$ αλλά σύμφωνα με τον ορισμό δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt{9} = -3$

➤ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ:

1) Για $\alpha \geq 0$ ισχύουν: $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! $\sqrt{9} = 3$ (και όχι ± 3)

2) Για $\alpha \in \mathbb{R}$ $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, $\sqrt[n]{\alpha^{2n}} = |\alpha|$ για $n \in \mathbb{N}^*$

➤ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ:

Για $\alpha, \beta \geq 0$ και $\kappa, \mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν :

$$1) \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$$

$$2) \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ με } \beta \neq 0$$

$$3) \sqrt[n]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n^{\nu}]{\alpha}$$

$$4) \sqrt[n]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$$

$$5) \sqrt[n]{\alpha^{\kappa}} = (\sqrt[n]{\alpha})^{\kappa}$$

$$6) \sqrt[n]{\alpha^{\nu}} \sqrt[n]{\beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$$

➤ Αν έχουμε παραστάσεις με άρρητους παρανομαστές για να τις μετατρέψουμε σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη «συζυγή» του παρανομαστή.

$$\sqrt[n]{\alpha} \rightarrow \sqrt[n]{\alpha^{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^{\mu}} \rightarrow \sqrt[n]{\alpha^{n-\mu}}, \mu < n$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \rightarrow \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta} \rightarrow \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta}$$

$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} \rightarrow \sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς

παρανομαστές. $A = \frac{a^3}{\sqrt[8]{a^3}}$, $a > 0$ και $B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$

$$A = \frac{a^3}{\sqrt[8]{a^3}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt[8]{a^{8-3}}}{\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^{8-3}}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[8]{a^8}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}{a} = a^2 \cdot \sqrt[8]{a^5}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{3 - 2} = \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦ 1^ο

1) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \neq 0$ δείξτε ότι:

α) $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\delta^2}$

β) $\frac{3\alpha - 7\beta}{6\beta} = \frac{3\gamma - 7\delta}{6\delta}$

2) Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{7}$ και $3x - 2y + \omega = 10$ να βρεθούν τα x, y, ω .

3) Αν $\frac{6x^2 - xy - 2y^2}{5x^2 + xy + 2y^2} = \frac{6}{5}$, όπου $y \neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\frac{x}{y}$ και η τιμή της

παράστασης $A = \frac{x - 4y}{x - y}$

4) Αν $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ και $\frac{x}{\alpha - \beta} = \frac{y}{\beta - \gamma} = \frac{z}{\gamma - \alpha}$ τότε οι αριθμοί $x + y, z$ είναι αντίθετοι.

5) Αν α περιττός, β άρτιος και $\alpha + \beta\lambda = 0$ τότε ο λ δεν είναι ακέραιος.

6) Αποδείξτε ότι αν ρ_1, ρ_2 ρητοί, α άρρητος και $\rho_1 + \rho_2 \cdot \alpha = 0$ τότε $\rho_1 = \rho_2 = 0$

7) Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $(x + 2)^2 - (x + 3)^2$

β) $(\alpha x + \beta y)^2 - (\alpha y + \beta x)^2$

γ) $3xy - 6x\omega + \alpha y - 2\alpha\omega$

δ) $\alpha^3 + \alpha^2 + \beta^3 - \beta^2$

8) Να βρεθούν τα εξαγόμενα: 4^0 , $(22 + 33,4)^0$, -2^0 , $(-1)^{-2\nu}$, $(-1)^{-(2\nu+1)}$, όπου ν φυσικός

9) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $(-\alpha^{-4})^{-3}$

β) $(4\alpha^{-2} + 3\alpha^{-5} - 2\alpha^3)2\alpha^{-4}$

γ) $(24\alpha^2\beta^{-3}\gamma^{-2} - 18\alpha^{-3}\beta\gamma^{-2}) : 6\alpha^{-3}\beta^2\gamma^{-3}$

10) Να αποδείξετε ότι:

α) $(x + 1)^3 + x^3 - (1 + 2x)^3 = -3x(x + 1)(1 + 2x)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $(x + 1)^3 + x^3 - (1 + 2x)^3 = 0$

11) Αν $\alpha - \beta = 2$ τότε $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 4\alpha + 4\beta + 3 = -1$

12) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{(x^4 - 16)(x^2 - x)}{(x^3 - x)(x^3 - 4x)}$

β) $\frac{(x - 2)(x - 4) - (2 - x)(x - 6)}{x^2 - 4}$

13) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x - 5)^3 + (x - 4)^3 + (9 - 2x)^3 = 0$

β) $\left[-(\chi - 2)^3 - 8(\chi - 1)^3 + 27\left(\chi - \frac{4}{3}\right)^3 \right] = 0$

14) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^2 + 16 \geq 8\alpha \quad \beta) 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2 \quad \gamma) (\alpha - \beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

15) Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \beta < \frac{\beta + \gamma}{2} < \gamma \quad \beta) \alpha < \frac{\beta + \gamma}{2} < \delta \quad \gamma) \alpha < \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} < \delta$$

16) Αν $\alpha + \beta = 4$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha\beta \leq 4 \quad \beta) \alpha^2 + \beta^2 \geq 8$$

17) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha^2 + 2\alpha + 4 > 0 \quad \beta) \text{αν } \alpha \neq 2 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha^2 - 4\alpha + 4} > \frac{2}{\alpha^3 - 8}$$

18) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) |x| &= \left| x + \frac{1}{3} \right| & \beta) 2|x| &= |1 - x| & \gamma) |2x + 3| - |3x + 2| &= 0 & \delta) \frac{|2x - 3|}{4} &= \left| \frac{1}{3} - x \right| \\ \epsilon) \frac{3|x| + 1}{2} + \frac{2|x| - 1}{3} &= \frac{|x| + 2}{3} & \sigma\tau) 1 + \frac{|x - 11| + 1}{2} - 3 \frac{3 - |x - 11|}{4} &= \frac{2|x - 11|}{3} - |x - 11| \\ \zeta) \frac{|x^2 - x| + 4}{2} - |x^2 - x| + 1 &= -\frac{|x^2 - x|}{4} + \frac{6 + |x - x^2|}{2} & \eta) 2(|x - 2| - 3) + |4 - 2x| &= 10 \\ \theta) \frac{|2x - 6| - 1}{3} - \frac{8 - |9 - 3x|}{2} &= \frac{|15 - 5x| - 10}{4} & \iota) ||x| - 3| &= x + 3 \end{aligned}$$

19) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \left| 3x - \frac{5}{2} \right| &> 2 & \beta) |x + 5| &\leq 1 & \gamma) |5 - 2x| &\geq 3 \\ \delta) |x + 4| &\geq 0 & \epsilon) |x + 4| &> 0 & \sigma\tau) |x + 4| &< 0 \end{aligned}$$

20) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{2|x| - 3}{4} &< \frac{1 + |x|}{3} & \beta) 3(|x| - 1) - 2(2 - |x|) &> 2 & \gamma) \frac{|x| + 3}{2} - \frac{2(|x| + 1)}{3} &\leq |x| - 5 \\ \delta) \frac{2|3 - x| - 1}{3} - |3 - x| &> \frac{|3 - x| - 8}{3} + 1 & \epsilon) ||x + 2| - 3| &> 2 & \sigma\tau) ||x - 3| - 10| &\leq 4 \end{aligned}$$

21) Να δείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) \left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right| &= \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| & \beta) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| &< \left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right| \\ \gamma) \text{αν } |\alpha| &> |\beta| \text{ τότε } \left| \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right| &< \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + 1 \end{aligned}$$

22) Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |\alpha - \beta| + |\gamma - \alpha + 1| - |2\alpha - \beta - \gamma|$$

23) Αν $1 < x < 2 < y$ να αποδείξετε ότι: $|1 - x| + |2 - y| + |x - y| - |2y - 1| = -2$

24) Αν $|\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 2|\alpha\beta|$ και $\alpha, \beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

- 25) γ) $|\chi + 2| = 2(3 - \chi)$ δ) $\chi + |3\chi - 2| = 11$ ε) $\frac{|1 + \chi| - |1 - \chi|}{\chi} = \frac{\chi}{2}$
 στ) $|\chi| - |2 - \chi| = 2$ ζ) $|3 - \chi| + 2|\chi + 1| = 4$ η) $|4\chi - 19| + 6|9 - \chi| = 25$
- 26) Να λυθούν οι ανισώσεις:
 α) $|3x - 2| \geq x + 2$ β) $|2 - x| < x$ γ) $3|x + 1| > x - 1$
- 27) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $\frac{x^2}{|x|}$ β) $\frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ γ) $\frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4} + \frac{2 - |x|}{x^2 - 4|x| + 4}$
- 28) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $\sqrt{(8a)^2}$ β) $\sqrt{\frac{x^4}{16}}$ γ) $\sqrt[4]{(2-x)^8}$ δ) $\sqrt[4]{9^{12}}$
 ε) $\sqrt{4a} - \sqrt{36a} + 10\sqrt{a}$ στ) $\sqrt{4\alpha^2\beta} + 6\sqrt{\alpha^2\beta} - 7\alpha\sqrt{\beta}$
- 29) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
 α) $\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{6}} - 2\sqrt{\sqrt{6}} + 2$ β) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\sqrt{7} + \sqrt{5}}\sqrt[3]{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$
 γ) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\sqrt{3} - 1}\sqrt[4]{\sqrt{5} + 1}\sqrt[4]{\sqrt{3} + 1}\sqrt[4]{\sqrt{5} - 1}$ δ) $\sqrt[4]{2^3\sqrt{2}}$
 ε) $\sqrt[5]{3^8\sqrt{3}\sqrt{3}}$ στ) $\sqrt[3]{5^5\sqrt{25}\sqrt{25}\sqrt{5}}$
- 30) Να δείξετε ότι:
 α) $\sqrt{7} + \sqrt{3} > \sqrt{10} + 1$ β) $\sqrt{10 + 2\sqrt{10}} > \sqrt{2} + \sqrt{5}$
 γ) $\sqrt{26} + 2 < \sqrt{13} + \sqrt{17}$ δ) $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$
 ε) $\frac{4}{4 - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} = \frac{11 + 8\sqrt{5}}{11}$ στ) $\frac{1}{(5 - \sqrt{7})^2} - \frac{1}{(5 + \sqrt{7})^2} = \frac{5\sqrt{7}}{81}$
- 31) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:
 α) $\frac{5}{\sqrt[4]{7}}$ β) $\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$ γ) $\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$
- 32) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$ για $x = \frac{2a\beta}{1 + \beta^2}$