

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0, \alpha \neq 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$\alpha\chi + \beta = 0$$

$$\chi^2 - S\chi + P = 0$$

$$S = \chi_1 + \chi_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$P = \chi_1 \cdot \chi_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΟΚΑΝΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

3.1 Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

- 1) Αν $\alpha \neq 0$ τότε η $\alpha x + \beta = 0$ έχει μια λύση : $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
- 2) Αν $\alpha = 0$ τότε η $\alpha x + \beta = 0$ γράφεται $0 \cdot x = -\beta$ οπότε :
- είναι αδύνατη (καμία λύση) όταν $\beta \neq 0$
 - είναι ταυτότητα (άπειρες λύσεις) όταν $\beta = 0$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{2} - x = -3$ (Ε.Κ.Π.=4)

$$4 \frac{3x-1}{4} - 4 \frac{x+1}{2} - 4x = 4(-3) \quad [\text{πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.}]$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 - 2(x+1) - 4x = -12 \quad (\text{απαλοιφή παρονομαστών})$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 - 2x - 2 - 4x = -12 \quad (\text{πράξεις})$$

$$\Leftrightarrow -3x - 3 = -12 \quad (\text{πράξεις})$$

$$\Leftrightarrow -3x = -12 + 3 \quad (\text{χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους})$$

$$\Leftrightarrow -3x = -9 \quad (\text{πράξεις})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9}{-3} \quad (\text{διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου})$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2 - 9 \chi = \lambda^2 + 3\lambda$

$$\lambda^2 - 9 \chi = \lambda^2 + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 3^2 \chi = \lambda^2 + 3\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3)\chi = \lambda(\lambda + 3)$$

- 1) Αν $(\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 \neq 0$ και $\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$ τότε υπάρχει μοναδική λύση η $\chi = \frac{\lambda(\lambda + 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} = \frac{\lambda}{\lambda - 3}$
- 2) Αν $\lambda = 3$ τότε η σχέση γίνεται: $(3 - 3)(3 + 3)\chi = 3(3 + 3) \Leftrightarrow 0\chi = 18$ (αδύνατη)
- 3) Αν $\lambda = -3$ τότε η σχέση γίνεται: $(-3 - 3)(-3 + 3)\chi = -3(-3 + 3) \Leftrightarrow 0\chi = 0$ (ταυτότητα)
- 4)

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $X^n = \alpha$

1) Για $\alpha > 0$

- Αν n περιττός η εξίσωση έχει μια λύση : $x = \sqrt[n]{\alpha}$
- Αν n άρτιος η εξίσωση έχει δύο (2) λύσεις : $x = \pm \sqrt[n]{\alpha}$

2) Για $\alpha < 0$

- Αν n περιττός η εξίσωση έχει μια (1) λύση : $x = -\sqrt[n]{-\alpha}$
- Αν n άρτιος η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να λυθούν οι εξισώσεις

1. $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$
2. $x^4 = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{5}$
3. $x^3 = -7 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{7}$
4. $x^6 = -32 \Leftrightarrow$ αδύνατη.
- 5.

3.3 Λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Διακρίνουσα ονομάζουμε την παράσταση $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ και την συμβολίζουμε με Δ , δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα για τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$
αν $\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Αν $\Delta = 0$	Έχει μία διπλή ρίζα τη $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$
Αν $\Delta < 0$	Δεν έχει πραγματικές ρίζες

Παρατηρήσεις:

- 1) Αν οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι, δηλαδή $\alpha\gamma < 0$ τότε η διακρίνουσα είναι θετική αφού $\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow -\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.
- 2) Αν το $\gamma = 0$ τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα το x .

$$\text{π.χ. } 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Αν το $\beta = 0$ τότε πηγαίνουμε τον αριθμό στο δεύτερο μέλος και λύνουμε ως προς x π.χ.

$$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Το άθροισμα των ριζών το συμβολίζουμε με S και το γινόμενο με P , δηλαδή $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

Επίσης ισχύουν οι τύποι: $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (Τύποι του Vieta)

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με την βοήθεια των τύπων του Vieta γράφεται: $x^2 - Sx + P = 0$

Με την βοήθεια της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$ μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα:

- 1) Να κατασκευάσουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της, π.χ. η εξίσωση που οι ρίζες της έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο 5 είναι $x^2 - 2x + 5 = 0$

2) Να βρούμε δύο αριθμούς αν είναι γνωστό το άθροισμά τους και το γινόμενό τους, π.χ. οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$ δηλαδή οι αριθμοί 2 και 3.

3) Να βρούμε αμέσως τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ αφού βρούμε δύο αριθμούς με άθροισμα S και γινόμενο P, π.χ. αν έχουμε την εξίσωση $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$ τότε S=5 και P=6. Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6 είναι το 2 και το 3. Άρα αυτές είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

Εξισώσεις που ανάγονται σε λύση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

- 1) Αν έχουμε εξίσωση με $|\chi|$, τότε θέτουμε το $|\chi| = y$
π.χ. $x^2 - 7|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 12 = 0$
 $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$ άρα $y_{1,2} = 3, 4$ $|\chi| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ και $|\chi| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$
- 2) Αν έχουμε κλασματικές εξισώσεις:
α) παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
β) βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών
γ) βάζουμε περιορισμούς για τους παρονομαστές
δ) κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
ε) κάνουμε τις πράξεις
στ) λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει
ζ) ελέγχουμε αν είναι δεκτές οι λύσεις από τους περιορισμούς που έχουμε
- 3) Αν έχουμε εξίσωση της μορφής $\alpha\chi^{2v} + \beta\chi^v + \gamma = 0$ τότε αυτή γίνεται $\alpha\chi^v^2 + \beta\chi^v + \gamma = 0$ και θέτουμε $\chi^v = \omega$, άρα έχουμε $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$. Αυτές οι εξισώσεις λέγονται **διτετράγωνες**.
Γενικά οι εξισώσεις της μορφής $\alpha\phi(\chi)^{2v} + \beta\phi(\chi)^v + \gamma = 0$ λύνονται θέτοντας $\phi(\chi)^v = \omega$,
άρα έχουμε $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $\frac{5\chi - 7}{3} - \frac{\chi - 9}{4} = \frac{\chi + 13}{2} - 2$
β) $(\chi^2 - 16)(3\chi - 1) = (\chi + 4)(3\chi - 1)^2$
γ) $\frac{4 - 3\chi}{6\chi - 6} = \frac{-2\chi + 3}{4\chi - 5}$
δ) $\frac{2\chi + 5}{2\chi - 2} = \frac{\chi}{\chi + 2}$
- 2) Να λυθούν οι παραμετρικές εξισώσεις:
α) $\lambda^2\chi - 3 = \lambda\chi + 1$ β) $\lambda^2\chi - 6 + \lambda = 3\lambda + 9\chi$ γ) $(\lambda + 1)\chi = \lambda^2 - 1$
δ) $\mu^2(\chi - 1) - 2 = 3\mu + \chi$ ε) $(\alpha^2 + 2\alpha + 1)\chi = \alpha^2 - 2\alpha - 3$
στ) $2(\lambda^2\chi - 1) = \lambda + 8\chi$ ζ) $(\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 9)\chi = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$

- 3) Δίνονται οι εξισώσεις: $(\lambda-1)x+3=3\lambda$ (1) και $\lambda(x+2)=x+1$ (2). Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ταυτότητα αν και μόνο αν η (2) είναι αδύνατη.
- 4) Δίνονται οι εξισώσεις: $(\lambda-2)x=\lambda^2-4$ (1) και $\lambda^2 x(x+1)-2(2x-1)=\lambda(\lambda x^2+1)$ (2) και $\lambda^2 x(x+1)-2(2x+1)=\lambda(\lambda x^2+1)$ (3).
α) Αν η (1) αληθεύει για κάθε x τότε το ίδιο συμβαίνει και για τη (2).
β) Αν η (1) είναι ταυτότητα, τότε η (3) είναι αδύνατη.
- 5) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=2\mu+4$ (1). Να βρεθούν οι λ, μ ώστε
α) η (1) να έχει μοναδική λύση.
β) η (1) να είναι αδύνατη
γ) η (1) να αληθεύει για κάθε x
- 6) Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^5-343x^2=0$ β) $x^8+x=0$ γ) $x^9=256x$ δ) $4x+x^7=0$
ε) $\sqrt{2x+1}=3$ στ) $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-6}$ ζ) $\sqrt[3]{3x-4}=\sqrt[3]{4x-7}$
- 7) Να λυθεί η εξίσωση: $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})=2x-\frac{1}{9}$
- 8) Αν η εξίσωση $2x-3|\lambda|+3=2\lambda^2 x$ έχει ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογιστεί ο λ .
- 9) Αν είναι $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.
- 10) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $\alpha=\beta=\gamma$.
- 11) Να δειχθεί ότι: αν η εξίσωση $(2\alpha-\beta)x^2-4\alpha x+4\beta=0$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2-2x+3(\alpha-\beta)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες
- 12) Δίνεται η εξίσωση $2x^2+2x-\mu+3=0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ :
α) αυτή έχει δύο διαφορετικές ρίζες
β) αυτή έχει μια διπλή ρίζα
γ) δεν έχει ρίζες.
- 13) Να βρείτε όλες τις εξισώσεις β' βαθμού που το άθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με το γινόμενο τους.
- 14) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-kx+\lambda=0$, δείξτε ότι:
$$|\rho_1|+|\rho_2|=\begin{cases} |k|, & \alpha\nu \lambda \geq 0 \\ \sqrt{k^2-4\lambda}, & \alpha\nu \lambda < 0 \end{cases}$$
- 15) Γράψτε την εξίσωση που έχει αντίθετες ρίζες από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2+x-6=0$.
- 16) Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2-\lambda(2x-3)=0$ που έχει ρίζες χ_1 και χ_2
Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)\left(x_2-\frac{3}{2}\right)$ είναι ανεξάρτητη του λ .
- 17) Αν χ_1 και χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να δέχεται ως ρίζες τις παραστάσεις: $\frac{1}{\alpha\chi_1+\beta}, \frac{1}{\alpha\chi_2+\beta}$ χωρίς να υπολογίσετε τις χ_1, χ_2 .
- 18) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha \neq 0$ και $\Delta \geq 0$. Να δειχθεί ότι:
α) οι ρίζες της είναι αντίθετες αν και μόνον αν $\beta=0$
β) οι ρίζες της είναι αντίστροφες αν και μόνον αν $\alpha=\gamma$.
- 19) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)x^2+(\lambda-2)x+3=0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η παραπάνω εξίσωση:

α) να έχει μία μόνο ρίζα

β) να έχει διπλή ρίζα

20) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$

i) θετικές, ii) ετερόσημες, iii) ίσες

21) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης

$\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε:

α) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ

β) να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε.

22) Να λυθεί η εξίσωση: $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$

23) Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - (a+1)x^2 + a = 0$

24) Να λυθεί η εξίσωση: $|x^2 - x| + |x^2 - 11x + 10| = 0$

25) Να λυθεί η εξίσωση: $x - \sqrt{x} = 20$.

26) Να λυθεί η εξίσωση: $(1 - |x|)^2 = 4$

27) Δείξτε ότι αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ τα α και γ είναι ετερόσημα, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

28) Αν η εξίσωση $x^2 - 2(\kappa - 1)x + 9 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα, τότε ο κ ισούται με:

A. 2

B. - 2

Γ. 4

Δ. - 4

E. 3

29) Η εξίσωση $(\lambda + 1)x^2 + \lambda x - 1 = 0$ έχει μία μόνο ρίζα όταν ο λ ισούται με:

A. 2

B. - 2

Γ. 1

Δ. - 1

E. 0