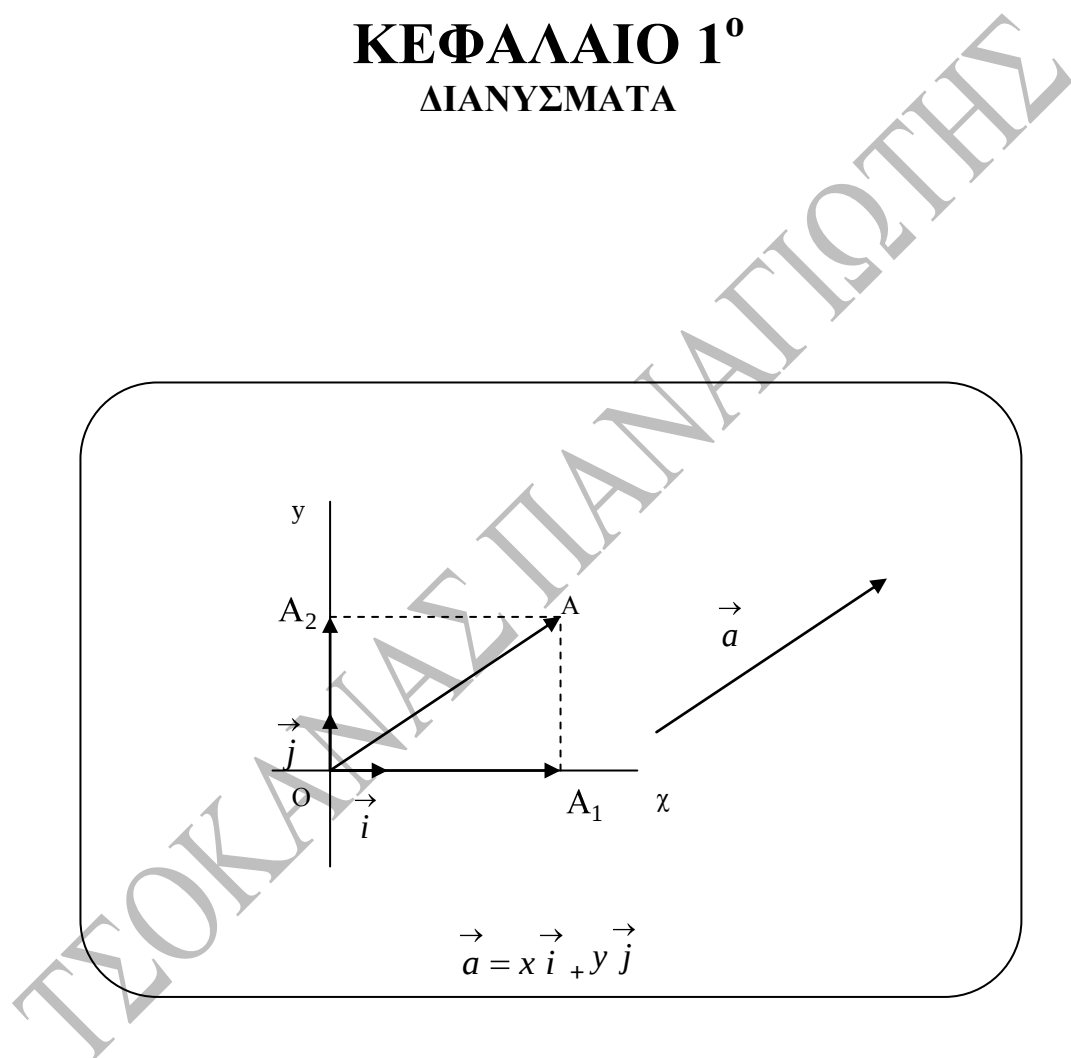


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

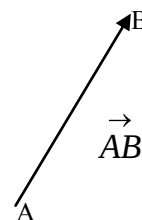


ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΟΚΑΝΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα λέγεται **διάνυσμα**. Το πρώτο άκρο λέγεται αρχή ή σημείο εφαρμογής και το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος.

Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\vec{AB}$



⇒ **Μηδενικό** λέγεται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας

συμπίπτουν, π.χ. το $\vec{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.

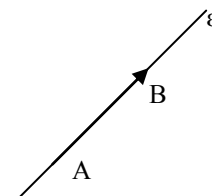
⇒ **Μέτρο ή μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ λέγεται η απόσταση των άκρων ή το μήκος

του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.

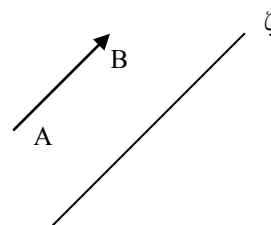
⇒ **Μοναδιαίο** λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο 1.

⇒ Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα

$\vec{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\vec{AB}$. Ως φορέα του μηδενικού διανύσματος μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ τότε λέμε ότι το $\vec{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\vec{AB} // \zeta$

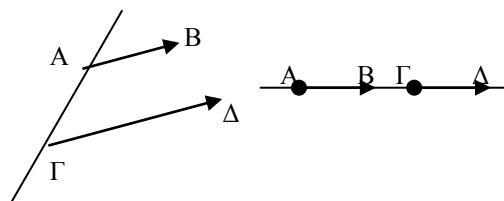


⇒ Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση και γράφουμε $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$. Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**

συγκεκριμένα

⇒ **Ομόρροπα** λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα όταν:

- α) έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή
- β) έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες AB και ΓΔ περιέχει την άλλη.



Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια

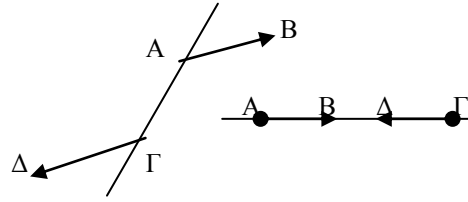
διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$.

$\Rightarrow$ **Αντίρροπα** λέγονται δύο μη μηδενικά

διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ όταν είναι
συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα

διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν
αντίθετη κατεύθυνση (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε

$$\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$$

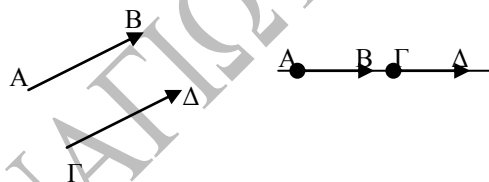


Ισα διανύσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο μη μηδενικά διανύσματα

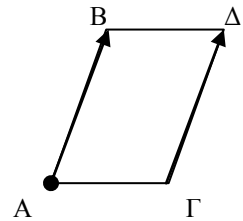
$\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια
κατεύθυνση και ίσα μέτρα και γράφουμε

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$$



Άμεσες συνέπειες

$\Rightarrow$ Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ τότε $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$, $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Delta}$ και $\vec{BA} = \vec{\Delta\Gamma}$



$\Rightarrow$ Αν M μέσο του $\vec{AB}$ τότε $\vec{AM} = \vec{MB}$ και αντιστρόφως

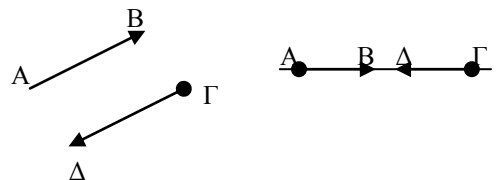


Αντίθετα διανύσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο μη μηδενικά διανύσματα

$\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίθετα** όταν έχουν
αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα και γράφουμε

$$\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} \text{ ή } \vec{\Gamma\Delta} = -\vec{AB}$$



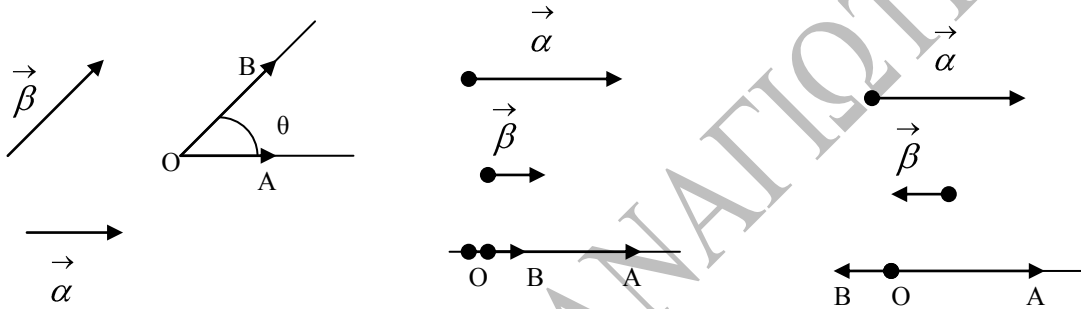
Άμεσες συνέπειες

$\Rightarrow$ Αν $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$

$\Rightarrow \vec{BA} = -\vec{AB}$

Γωνία δύο διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Την κυρτή γωνία $\angle AOB$ που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και την συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{a})$ ή με ένα μικρό γράμμα θ . Είναι φανερό ότι $0 \leq \theta \leq \pi$



Ειδικότερα

$$\Rightarrow \theta=0 \text{ αν } \vec{a} \uparrow \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \theta=\pi \text{ αν } \vec{a} \downarrow \vec{\beta}$$

Αν $\theta=\pi/2$ τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ορθογώνια ή κάθετα

και γράφουμε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

Παρατηρήσεις

Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε ως γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμα και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

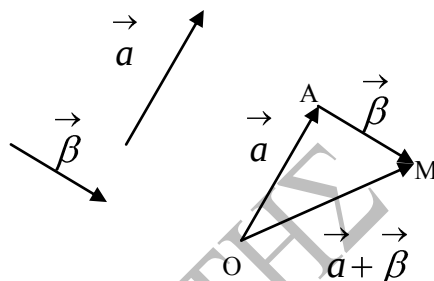
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα

σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα

$$\vec{AM} = \vec{\beta}.$$



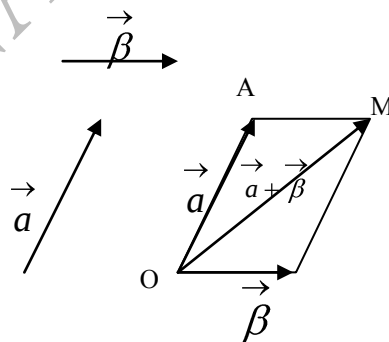
Το διάνυσμα $\vec{OM}$ λέγεται άθροισμα ή

συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{a} + \vec{\beta}$.

Δεύτερος τρόπος πρόσθεσης διανυσμάτων (κανόνας παραλληλογράμμου)

Αν με αρχή ένα σημείο O πάρουμε τα διανύσματα

$\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$ τότε το άθροισμα $\vec{a} + \vec{\beta}$ ορίζεται από την διαγώνιο OM που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα. Τότε ισχύουν:

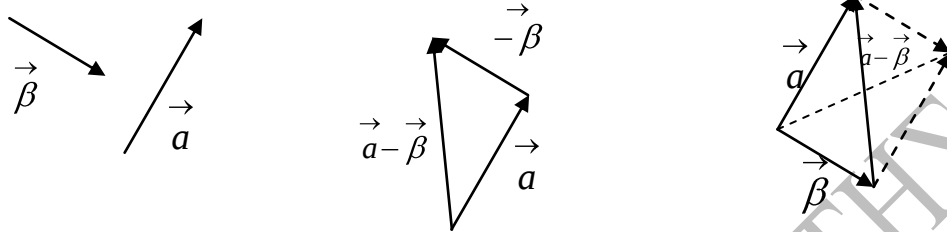
- 1) $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- 2) $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Άμεση συνέπεια

Για να προσθέσουμε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ τα καθιστούμε διαδοχικά οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου.

Αφαίρεση διανυσμάτων

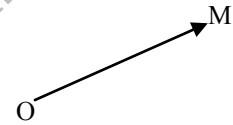
Η διαφορά $\vec{a} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{a}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$



Διάνυσμα θέσεως

Έστω Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο

Μ του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\vec{OM}$ το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του Μ** ή **διανυσματική ακτίνα του Μ**. Το σημείο Ο που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



Αν Ο ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

δηλαδή κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με την διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής.

Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$

Παρατηρήσεις

$$\Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$$

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda \vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

$\Rightarrow$ Είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$.

$\Rightarrow$ Έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε ως $\lambda \vec{a}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Ιδιότητες

$$\Rightarrow \lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$\Rightarrow \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$$

Άμεσες συνέπειες ορισμού -ιδιότητες

$$1) \lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) (-\lambda \vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda \vec{a})$$

$$3) \lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} - \lambda \vec{\beta}$$

$$4) (\lambda - \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} - \mu \vec{a}$$

$$5) \text{ Αν } \lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \neq 0 \text{ τότε } \vec{a} = \vec{\beta}$$

$$6) \text{ Αν } \lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \text{ και } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ τότε } \lambda = \mu$$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων (1^η συνθήκη)

Θεώρημα: Αν $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ειδικότερα

$\Rightarrow$ Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε $\lambda > 0$

$\Rightarrow$ Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\lambda < 0$

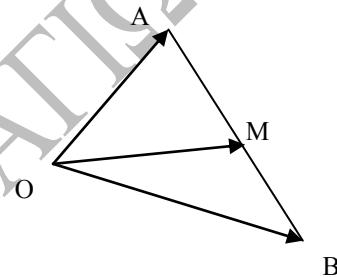
$\Rightarrow$ Αν $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda = 0$

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος

Έστω $\vec{AB}$ ένα διάνυσμα και Ο ένα σημείο αναφοράς.

Για τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου Μ του

τμήματος ΑΒ έχουμε
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Συντεταγμένες διανύσματος

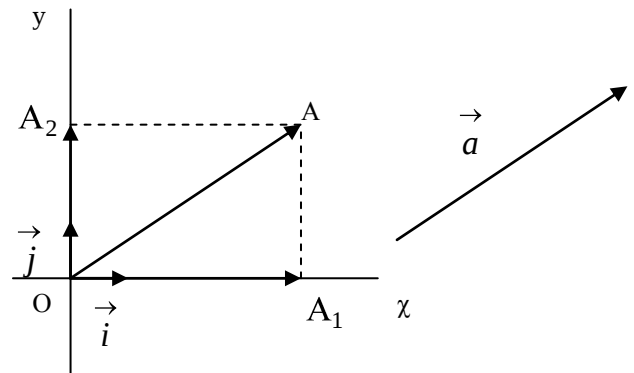
Έστω Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων

στο επίπεδο και $\vec{a}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το Ο σχεδιάζουμε το

διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του Α στους άξονες x'x και

y'y αντίστοιχα έχουμε $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$.

Αν (x,y) είναι οι συντεταγμένες του Α τότε



$\vec{OA_1} = x \vec{i}$ και $\vec{OA_2} = y \vec{j}$ άρα $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Ωστε *κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα ενώ οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Οxy.

Δύο διανύσματα λέγονται **ίσα** αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους είναι ίσες. Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) .

Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

$$\Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ ή ισοδύναμα } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \text{ ή ισοδύναμα } \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \text{ ή ισοδύναμα } \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

Συντεταγμένες μέσου τμήματος

Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ τότε:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Μέτρο διανύσματος, Απόσταση δύο σημείων

$$\Rightarrow \text{Αν } \vec{\alpha} = (x, y) \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\Rightarrow$ Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε η απόστασή τους είναι:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

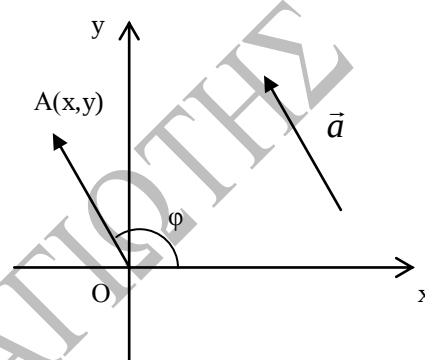
Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων (2^η συνθήκη)

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, $x \neq 0$ τότε $\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\phi\phi$ όπου ϕ η

γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x' , δηλαδή η γωνία που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OA



$\Rightarrow$ Αν $\vec{\alpha} // x'$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda=0$

$\Rightarrow$ Αν $\vec{\alpha} // y'y$ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για το $\vec{\alpha}$

$\Rightarrow$ Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα

τότε: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (3^η συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων)

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζουμε:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

1. Προφανώς το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός.
2. Αποδεικνύεται ότι: αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
(Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
2. $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
3. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)
4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$
5. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
6. Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
7. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
8. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\text{syn}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{\chi_1 \cdot \chi_2 + \psi_1 \psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$
9. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$ (αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον $\psi\psi'$)

ΠΡΟΣΟΧΗ: (Τι δεν ισχύει)

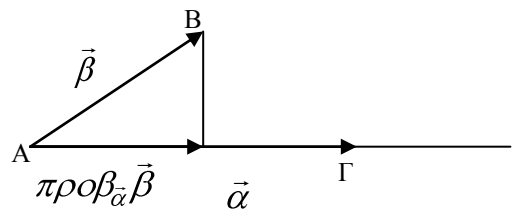
- | | | |
|--|---|----------|
| 1. $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ | Σ | <u>Λ</u> |
| 2. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ | Σ | <u>Λ</u> |
| 3. Ισχύει ότι: $ \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $ | Σ | <u>Λ</u> |
| 4. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ | Σ | <u>Λ</u> |
| 5. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ | Σ | <u>Λ</u> |
| 6. $ \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} $ | Σ | <u>Λ</u> |

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ονομάζουμε προβολή του διανύσματος $\vec{\beta} = \vec{AB}$ στο

διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{A\Gamma}$ (και συμβολίζουμε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$) το διάνυσμα που είναι ορθή προβολή του ευθυγράμμου τμήματος AB σε ευθεία παράλληλη με τον φορέα του $\vec{\alpha}$.

Αποδεικνύεται ότι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1: Για να υπολογίσουμε την γωνία δύο διανυσμάτων χρησιμοποιούμε τον τύπο:

ΤΣΟΚΑΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{\chi_1 \cdot \chi_2 + \psi_1 \psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{a} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$

Λύση: $\cos \theta = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2: Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι κάθετα αρκεί να δείξουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0.

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\kappa} = \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$

Λύση: Ισχύει ότι: $\vec{\kappa} \cdot \vec{\beta} = \left(\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \right) \cdot \vec{\beta} = \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ Άρα: $\vec{\kappa} \perp \vec{\beta}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 3: Για να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος που δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων διανυσμάτων τότε υπολογίζουμε το τετράγωνο του διανύσματος που μας ενδιαφέρει χρησιμοποιώντας τον τύπο: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\kappa} = 2 \cdot \vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta}$ αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$

και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Λύση: Ισχύει ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \phi = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Άρα: $|\vec{\kappa}|^2 = |2 \cdot \vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta}|^2 = (2 \cdot \vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta})^2 = 4 \cdot \vec{\alpha}^2 + 12 \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9 \cdot \vec{\beta}^2 = 4 + 12 + 36 = 52$

Οπότε: $|\vec{\kappa}| = \sqrt{52}$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4: Για να δείξουμε ισότητες ή ανισότητες με μέτρα διανυσμάτων υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο.

Παράδειγμα: Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

$$|4\vec{a} - 3\vec{\beta}| = |4\vec{a} + 3\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$$

Λύση: Ισχύει ότι: $|4\vec{a} - 3\vec{\beta}|^2 = |4\vec{a} + 3\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (4\vec{a} - 3\vec{\beta})^2 = (4\vec{a} + 3\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$$16\vec{a}^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 16\vec{a}^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 48\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{\beta}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 5: Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η μία να είναι παράλληλη προς δεδομένο διάνυσμα $\vec{a}$ υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v} \cdot \vec{a}$ με τον ορισμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \chi_1 \cdot \chi_2 + \psi_1 \cdot \psi_2$ και από τον τύπο

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{πρ} \beta_{\vec{a}} \vec{v}$$

Παράδειγμα: Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3,1)$ και $\vec{v} = (1,2)$. Να αναλυθεί το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$.

Λύση: Έστω $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ όπου $\vec{v}_1$ η συνιστώσα που είναι παράλληλη στο $\vec{a}$ οπότε:

$$\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{a} = (3\lambda, \lambda) \text{ . Άρα } \vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{πρ} \beta_{\vec{a}} \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{v}_1 = 9\lambda + \lambda = 10\lambda \text{ και}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

Άρα $10\lambda=5 \Leftrightarrow \lambda=0,5$. Οπότε: $\vec{v}_1=(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ και $\vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=(1,2)-(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

ΤΣΟΚΑΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ