

5. Να αποδειχθεί ότι: $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
6. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, να δειχθεί ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.
7. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}|\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\beta}| \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp \vec{\beta}$.
8. Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(8\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 9\vec{\beta})$, τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
9. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογιστεί το $|5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$.
10. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{7}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$ να βρεθεί το $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$.
11. Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 3$ και $6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 0$, να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
12. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp \left(\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{2}\right)$ και $|\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{40}$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.
13. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, |\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}|^2 = 3|\vec{\beta}|^2$.
14. Αν $3\vec{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{9}\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $3\sqrt{3} \cdot |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = |\vec{\gamma}|$, να υπολογιστεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
15. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία μη μηδενικά διανύσματα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, για τα οποία ισχύει ότι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$, να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.
16. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύει: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 5\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 8$, να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
17. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -2$, να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.
18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$
- Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
 - Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$
19. Δίνονται: $\vec{\alpha} = (-3, 2), \vec{\beta} = (2, 4), \vec{\gamma} = (8, -8)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, αν $(\vec{\alpha} \cdot \vec{x})\vec{\beta} = \vec{\gamma} - 6\vec{x}$
20. i. Να αποδείξετε ότι $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$. Πότε ισχύει το “=”;
- ii. Αν $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ και $\vec{w} = (\gamma, \delta)$, να αποδείξετε ότι