

3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

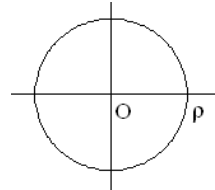
Ορισμός κύκλου: Κύκλος λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Το σταθερό σημείο λέγεται κέντρο και η σταθερή απόσταση λέγεται ακτίνα.

Εξίσωση κύκλου: Έστω Oxy ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

- Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα ρ είναι:

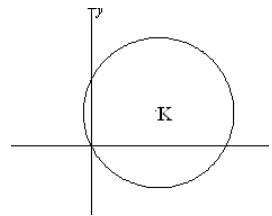
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

(Αν η ακτίνα του κύκλου είναι 1 τότε ο κύκλος λέγεται μοναδιαίος)



- Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$



Παράδειγμα:

1. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2 είναι

$$x^2 + y^2 = 4$$

2. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K(2,-1)$ και ακτίνα 2 είναι

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο.

Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Εφαπτομένη κύκλου:

Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Η εξίσωση

της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A είναι $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

(αν ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A είναι

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2)$$

Σχετική θέση κύκλου και σημείου

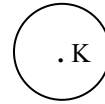
Έστω σημείο A και κύκλος C κέντρου K και ακτίνας ρ . Ισχύουν τα εξής:

- A εσωτερικό σημείου κύκλου τότε $(KA) < \rho$
- A εξωτερικό σημείου κύκλου τότε $(KA) > \rho$
- A σημείου κύκλου τότε $(KA) = \rho$

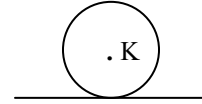
Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

Έστω ευθεία ε και κύκλος C κέντρου K και ακτίνας ρ . Ισχύουν τα εξής:

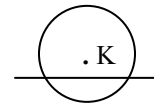
- Η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) > \rho$



- Η ευθεία ε έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (δηλαδή εφάπτεται) αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) = \rho$

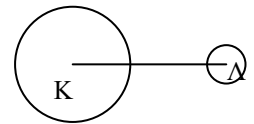


- Η ευθεία ε έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) < \rho$

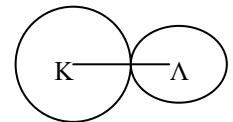
Σχετική θέση δύο κύκλων

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) . Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα των κύκλων ονομάζεται διάκεντρος. (Συμβολισμός δ)

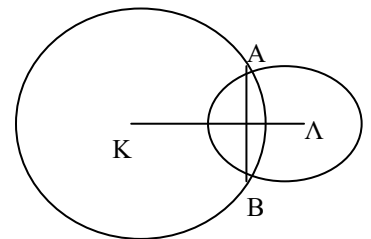
- 1) Αν είναι $\delta > R + \rho$ τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.



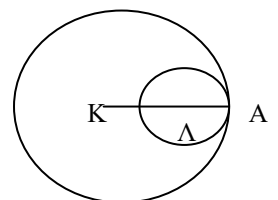
- 2) Αν είναι $\delta = R + \rho$ οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο A το οποίο ανήκει στην διάκεντρό τους $K\Lambda$ και λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



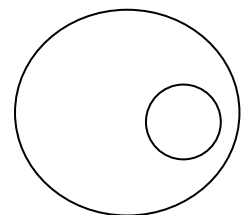
- 3) Αν είναι $R - \rho < \delta < R + \rho$ οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία A, B , η διάκεντρό τους $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος του AB και λέμε ότι οι κύκλοι τέμνονται.



- 4) Αν είναι $\delta = R - \rho$ οι κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A το οποίο βρίσκεται στην ευθεία της διακέντρου τους $K\Lambda$ και λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

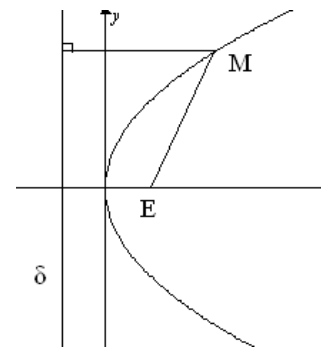


- 5) Αν είναι $\delta < R - \rho$ οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο και ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου.



3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορισμός: Παραβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία δ και ένα σταθερό σημείο E , που δεν ανήκει στη δ . Δηλαδή $d(M, \delta) = (ME)$. Η ευθεία δ λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και το σημείο E **εστία** της παραβολής.



Εξίσωση παραβολής:

- Η εξίσωση της παραβολής που έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$ και

εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ είναι $y^2 = 2px$

- Η εξίσωση της παραβολής που έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta: y = -\frac{p}{2}$ και

εστία το σημείο $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ είναι $x^2 = 2py$

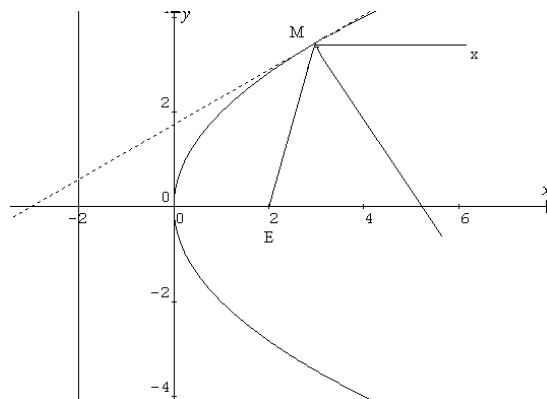
Ο αριθμός p λέγεται παράμετρος της παραβολής και ισχύει $|p| = d(E, \delta)$

Εξίσωση εφαπτομένης παραβολής

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$
- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 = p(y + y_1)$

Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο επαφής διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ME και η ημιευθεία $M\chi$ που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.



3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός: Έλλειψη λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $(E'E)$.

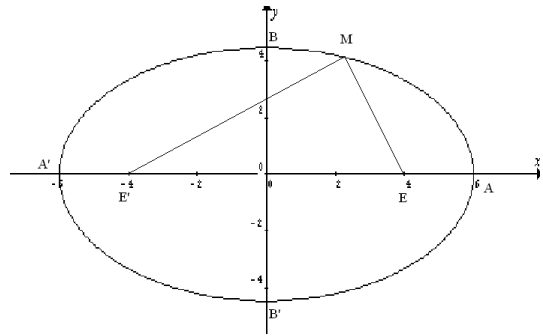
Τα σημεία E' και E λέγονται εστίες της έλλειψης και η απόσταση $(E'E)$ εστιακή

απόσταση. Το σταθερό άθροισμα

συμβολίζεται με 2α και η εστιακή απόσταση με 2γ .

Δηλαδή $M \in C \Leftrightarrow (ME') + (ME) = 2\alpha > (E'E) = 2\gamma$

Ισχύει ότι $2\alpha > 2\gamma \Leftrightarrow \alpha > \gamma$



Εξίσωση έλλειψης:

- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ του άξονα $x'x$ και σταθερό

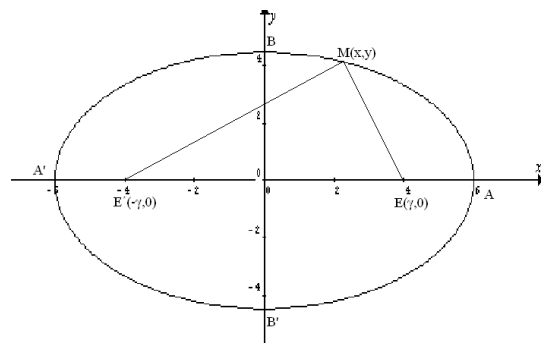
άθροισμα 2α είναι :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Τα σημεία $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ λέγονται κορυφές της έλλειψης

Το τμήμα $A'A$ λέγεται μεγάλος άξονας της έλλειψης και έχει μήκος 2α , ενώ το τμήμα $B'B$ λέγεται μικρός άξονας και έχει μήκος 2β .



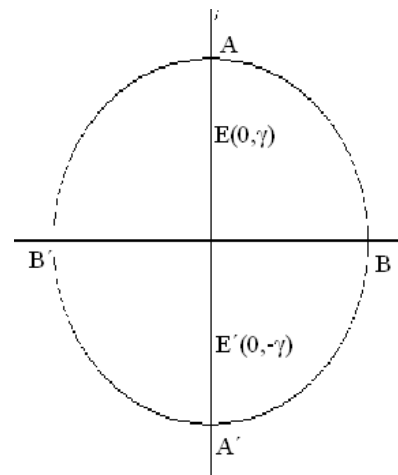
- Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ του άξονα $y'y$ και σταθερό άθροισμα 2α

είναι :

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \text{ όπου } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Τα σημεία $A'(0, -a)$, $A(0, a)$, $B'(-b, 0)$, $B(b, 0)$ λέγονται κορυφές της έλλειψης

Το τμήμα $A'A$ λέγεται μεγάλος άξονας της έλλειψης και έχει μήκος 2α , ενώ το τμήμα $B'B$ λέγεται μικρός άξονας και έχει μήκος 2β .



Εκκεντρότητα έλλειψης

Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$ $\left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\text{εστιακη αποσταση}}{\text{σταθεροαθροισμα}} \right)$ λέγεται

εκκεντρότητα της έλλειψης και καθορίζει τη μορφή της έλλειψης.

$$\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 = 1 - \varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Όταν, όμως το ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα.

Όταν δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα τότε λέμε ότι είναι όμοιες.

Εξίσωση εφαπτομένης έλλειψης

➤ Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της

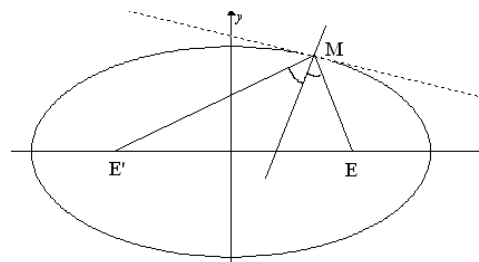
$$A(x_1, y_1) \text{ είναι } \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

➤ Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο σημείο της

$$A(x_1, y_1) \text{ είναι } \frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$$

Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$ όπου E' και E οι εστίες της έλλειψης.



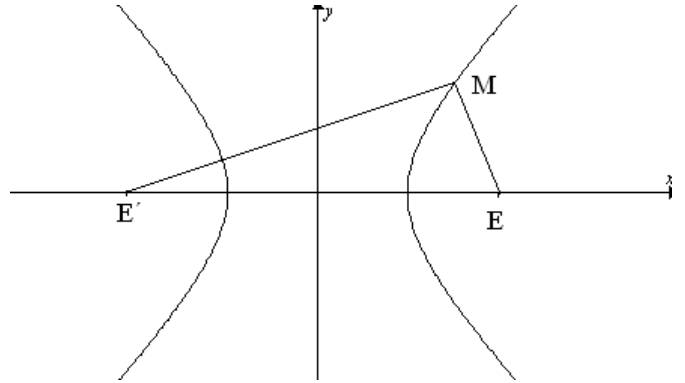
3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός: Υπερβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων τη απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο διαφορετικά σημεία E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

Τα σημεία E' και E λέγονται εστίες της υπερβολής και η απόσταση $(E'E)$ εστιακή απόσταση. Το απόλυτο της σταθερής διαφοράς συμβολίζεται με 2α και η εστιακή απόσταση με 2γ .

Δηλαδή $M \in C \Leftrightarrow |(ME') - (ME)| = 2\alpha < (E'E) = 2\gamma$

Ισχύει ότι $2\alpha < 2\gamma \Leftrightarrow \alpha < \gamma$

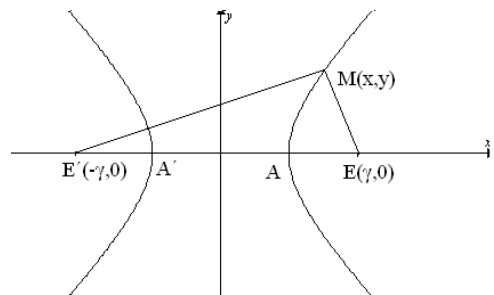


Εξίσωση υπερβολής

- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ του άξονα $x'x$ και σταθερή διαφορά 2α είναι :
- $$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{όπου}$$

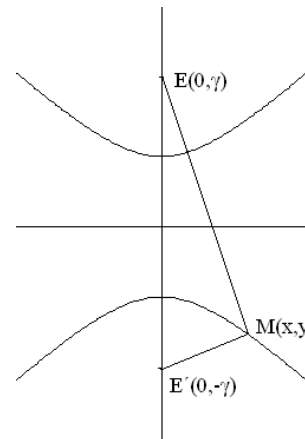
$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

Τα σημεία $A'(-\alpha, 0)$, $A(\alpha, 0)$ λέγονται κορυφές της υπερβολής



- Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ του άξονα $y'y$ και σταθερή διαφορά 2α είναι :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{όπου} \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$



- Στις παραπάνω δύο περιπτώσεις αν ισχύει $\alpha = \beta$ τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \alpha^2$ ή $y^2 - x^2 = \alpha^2$

Ασύμπτωτες υπερβολής

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες

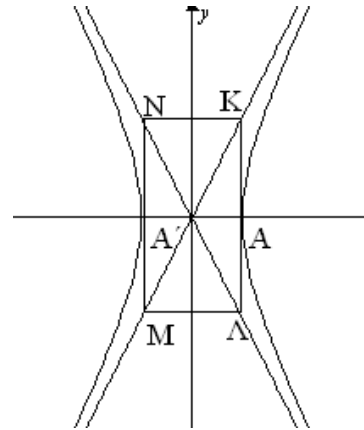
$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \text{ και } y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x \text{ και } y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$

Ορθογώνιο βάσης υπερβολής

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι φορείς των διαγωνίων του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με $K(\alpha, \beta)$, $\Lambda(\alpha, -\beta)$, $M(-\alpha, -\beta)$, $N(-\alpha, \beta)$. Το ορθογώνιο αυτό ονομάζεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

**Εκκεντρότητα υπερβολής**

Ο λόγος $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$ $\left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\text{εστιακη αποσταση}}{\text{σταθερη διαφορα}} \right)$ λέγεται

εκκεντρότητα της υπερβολής και καθορίζει το σχήμα της υπερβολής.

$$\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 = \varepsilon^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Όταν το ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0. Επομένως το β τείνει

στο μηδέν, άρα τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Εξίσωση εφαπτομένης υπερβολής

➤ Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της

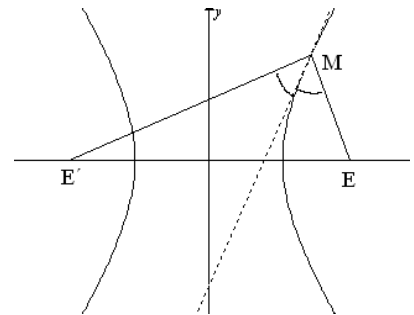
$$A(x_1, y_1) \text{ είναι } \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

➤ Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της

$$A(x_1, y_1) \text{ είναι } \frac{yy_1}{\alpha^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'ME$ όπου E' και E οι εστίες της υπερβολής.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 1) Δίνεται ο κύκλος $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y+\lambda=0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
 α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές του λ για τις οποίες η ε εφάπτεται στον C .
 β) Για τη θετική από τις παραπάνω τιμές του λ να βρείτε το σημείο επαφής των ε και C .
- 2) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα τον $\chi\chi'$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x-y+1=0$
- 3) Ναδειχθεί ότι η προβολή της εστίας της παραβολής $y^2 = 2px$ πάνω σε οποιαδήποτε εφαπτομένη της, είναι σημείο του άξονα yy' .
- 4) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της παραβολής $y^2 = 8x$ που έχει μέσο το σημείο $A(3,2)$
- 5) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $M(-1,2)$ και έχει μεγάλο άξονα διπλάσιο από το μικρό.
- 6) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x-y-5=0$.

- 7) Έστω η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν η ασύμπτωτη $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με την ασύμπτωτη $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ γωνία $2\pi/3$, να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής.
- 8) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ η οποία έχει μέσο το σημείο $A(2,1)$.
- 9) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από το σημείο $A(-4,0)$ και την ευθεία $\varepsilon: 4x+25=0$ είναι ίσος με $4/5$.
- 10) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$ ανήκουν σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 11) Να βρείτε το γ.τ. των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $M(-1,0)$ και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2x$.
- 12) Η εφαπτομένη της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ τέμνει τις ασύμπτωτες στα K και Λ . Να αποδείξετε ότι $\left| \vec{KA} \right| = \left| \vec{\Lambda A} \right|$
- 13) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - 4\lambda x + 2 = 0$ παριστάνει
α) έλλειψη β) υπερβολή
- 14) Δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του επιπέδου. Να βρείτε το γ.τ. των σημείων M για τα οποία είναι $\hat{AMB} = 90^\circ$
- 15) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2px$, οι οποίες άγονται από τυχαίο σημείο της διευθετούσας της παραβολής, είναι κάθετες.
- 16) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 1$, οι οποίες απέχουν από την αρχή O των αξόνων $1/4$ μονάδες.