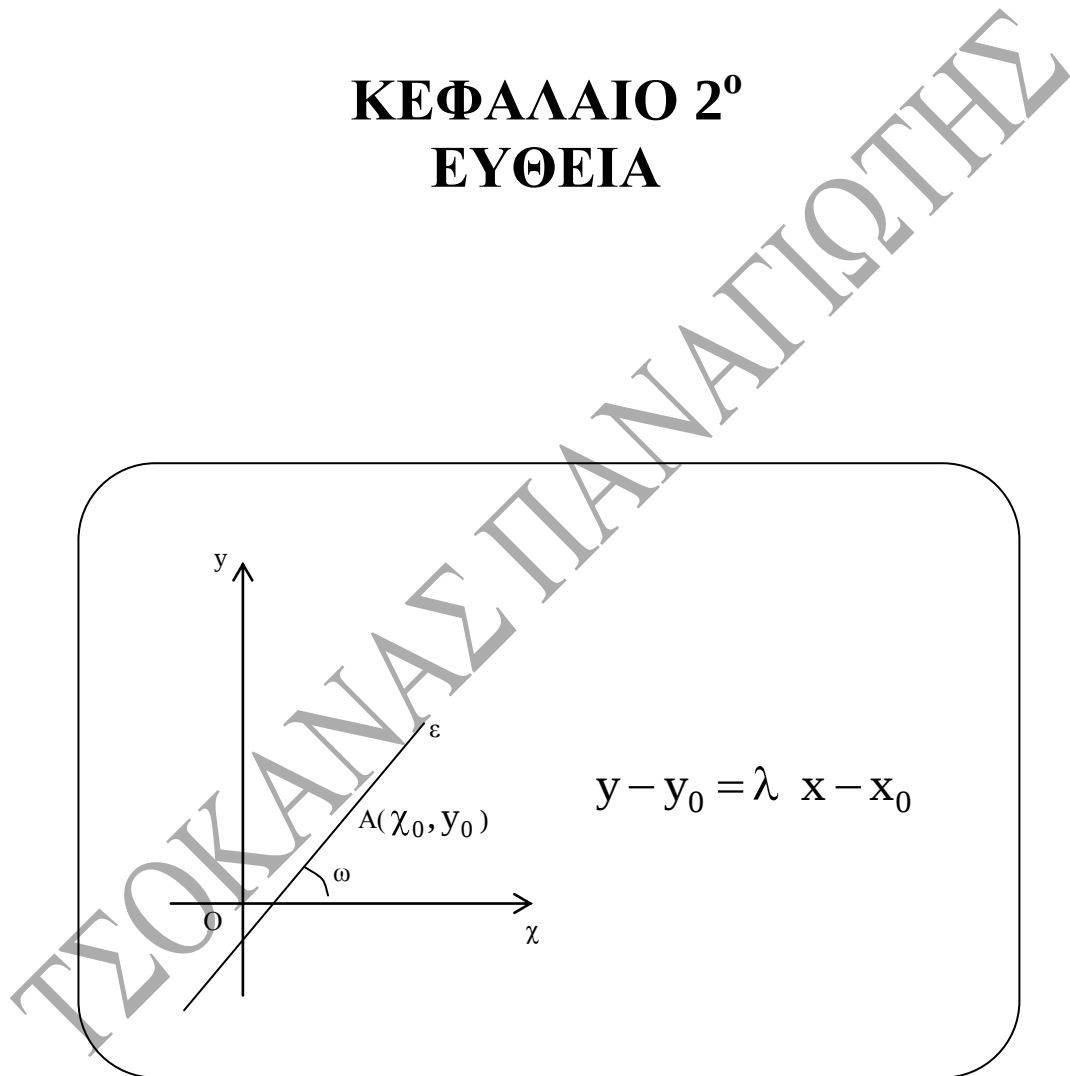


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΕΥΘΕΙΑ



ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΟΚΑΝΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

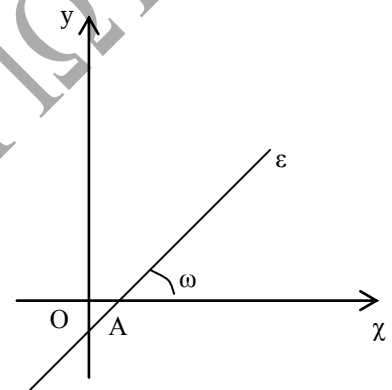
2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Εξίσωση γραμμής: Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y θα λέμε ότι είναι η εξίσωση μιας γραμμής C ή αλλιώς ότι παριστάνει τη γραμμή C , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνο αυτές την επαληθεύουν.

Παράδειγμα: Έστω η γραμμή C με εξίσωση $2x^2 + y = 3$ (1) και τα σημεία $A(0,2)$ και $B(1,1)$. Η σχέση (1) για $x=0$ και $y=2$ γράφεται $2 \cdot 0^2 + 2 = 3$ και δεν ισχύει, ενώ για $x=1$ και $y=1$ γράφεται $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ και ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο B ανήκει στη C , ενώ το A όχι ή αλλιώς ότι η C διέρχεται από το B , όχι όμως από το A .

Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$

Έστω ε μια ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τον τέμνει στο σημείο A . Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ αν στραφεί θετικά (αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε , τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$** . Αν η ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ως γωνία που σχηματίζει η ε με αυτόν θεωρούμε τη γωνία $\omega=0$.



Για την γωνία ευθείας ισχύει: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \omega < \pi$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. Τότε ο αριθμός

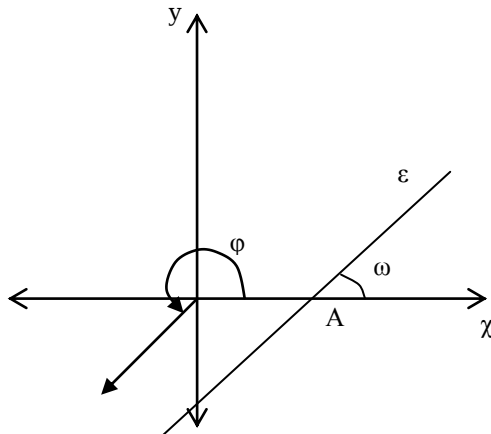
$$\lambda = \varepsilon \varphi \omega$$

εφόσον ορίζεται λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης (ή κλίση) της ε** .

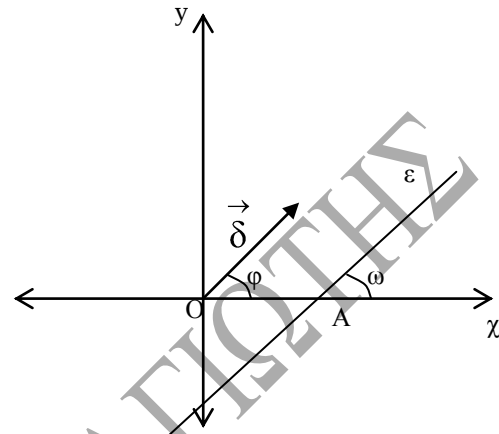
Παρατηρήσεις

- ω οξεία $\Leftrightarrow \lambda > 0$
- ω αμβλεία $\Leftrightarrow \lambda < 0$
- $\omega = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$
- $\omega = 90^\circ$ (δηλ. $\varepsilon \perp x'x$) $\Leftrightarrow$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης της ε

Όταν μια ευθεία ε είναι παράλληλη με διάνυσμα $\vec{\delta}$ και είναι ω και φ αντίστοιχα η γωνία της ευθείας ε και του διανύσματος $\vec{\delta}$ με τον $\chi'\chi$ τότε είναι $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$ και επομένως $\varepsilon\varphi = \varepsilon\varphi\omega$ [$\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$], δηλαδή $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\vec{\delta}}$



$$\varphi = \pi + \omega$$



$$\varphi = \omega$$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας όταν είναι γνωστά δύο σημεία της

Έστω ε μια ευθεία και $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της με $x_1 \neq x_2$. Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ε δίνεται από τον τύπο

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-3,4)$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

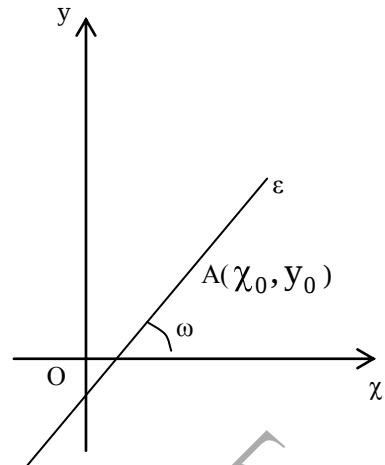
Συνθήκες καθετότητας και παραλληλίας ευθειών

Έστω δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες δεν είναι κάθετες στον άξονα $\chi'\chi$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύουν:

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Εξίσωση ευθείας

- Πως βρίσκουμε εξίσωση ευθείας ε αν γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ αυτής και ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ από το οποίο διέρχεται:
η εξίσωση είναι $y - y_0 = \lambda (x - x_0)$

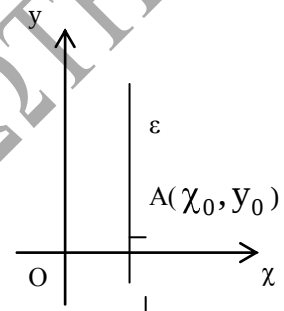


Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

Ειδικές περιπτώσεις

- Αν μια ευθεία διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα x' , τότε δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης. Η εξίσωση αυτής της ευθείας είναι η $x = x_0$



- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - \beta = \lambda(x - 0)$, η οποία τελικά γράφεται $y = \lambda x + \beta$

- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τότε η εξίσωσή της είναι $y - 0 = \lambda(x - 0)$ ή $y = \lambda x$

- Η διχοτόμος της γωνίας $x'Oy$ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x' , άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan 45^\circ = 1$ και εξίσωση $y = x$

- Η διχοτόμος της γωνίας $x'Oy$ σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x' , άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$ και εξίσωση $y = -x$

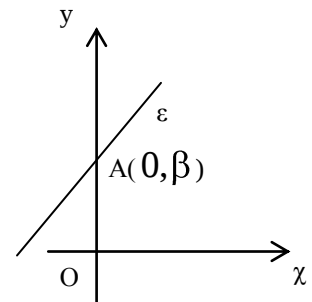
- Η ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x' έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan 0^\circ = 0$ και εξίσωση $y - y_0 = 0 \Leftrightarrow y = y_0$

- Πως βρίσκουμε εξίσωση ευθείας ε αν γνωρίζουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ από τα οποία διέρχεται:

Βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας από τον τύπο

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και μετά διαλέγουμε ένα σημείο από τα } A, B \text{ (όποιο θέλουμε)}$$

και χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - y_0 = \lambda (x - x_0)$



Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-3,4)$:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ και αν διαλέξουμε το σημείο } A \text{ έχουμε}$$

$$y - y_0 = \lambda (x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Παρατήρηση: Αν $x_1 = x_2$ η ευθεία θα έχει εξίσωση $x = x_1$ (δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης)

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1) με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή

Διάνυσμα παράλληλο και κάθετο σε ευθεία.

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

α) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ καθώς και στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$

β) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$

Παράδειγμα: Έστω η ευθεία $2x + 3y - 5 = 0$. Τότε η ευθεία είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2, 3)$ και παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (3, -2)$ ή στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-3, 2)$

2.3 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

Έστω ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ και μια ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Τότε η απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του σημείου A από την ευθεία ε δίνεται από τον τύπο:

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(2, -3)$ από την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 5$
Γράφουμε πρώτα την εξίσωση στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, άρα έχουμε $2x - y - 5 = 0$

$$d(A,\varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 + 3 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Αν Α, Β, Γ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

$$\text{δίνεται από τον τύπο: } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB}, \vec{AG} \end{pmatrix} \right|$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α(-2,3) Β(-1,5) και Γ(6,13)

Βρίσκουμε πρώτα τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AG}$

$$\vec{AB} = (-1 + 2, 5 - 3) = (1, 2)$$

$$\vec{AG} = (6 + 2, 13 - 3) = (8, 10)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB}, \vec{AG} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |10 - 16| = \frac{1}{2} |-6| = \frac{1}{2} 6 = 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία Α(1,-3) Β(-2,1) και Γ(4,5). Να βρείτε τις εξισώσεις της διαμέσου ΑΔ και του ύψους ΒΕ. Ποιο είναι το σημείο τομής αυτών των ευθειών; Ποιες είναι οι συντεταγμένες του Ε.
- 2) Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι $x+y=2$, $2x-y=1$ και $x-3y=3$. Να βρείτε τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων και το περίκεντρο του τριγώνου.
- 3) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(-2,1) ως προς την ευθεία ε: $x+2y-3=0$
- 4) α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\lambda^2 - 3\lambda + 2 \chi + 2\lambda - \lambda^2 y + 3 - \lambda = 0$ παριστάνει ευθεία.
β) Πότε η παραπάνω ευθεία είναι 1) παράλληλη στον $\chi'\chi$ 2) παράλληλη στον $y'y$
3) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1, -2)$
- 5) Δίνονται τα σημεία Α(3,0), Β(1,4) και η ευθεία ε: $2x+y-2=0$. Να βρείτε σημείο Μ της ε για το οποίο το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.
- 6) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\chi + y - 3 = 0$, $\varepsilon_2: 4\chi - 3y + 1 = 0$ και το σημείο Α(1,-2). Να βρείτε το σημείο Β της ε_2 τέτοιο ώστε το μέσο Μ του ΑΒ να είναι σημείο της ε_1 .
- 7) Οι δύο πλευρές τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις $2x-y=2$ και $2x+y=10$. Αν το βαρύκεντρο του τριγώνου είναι το Κ(3,4/3), να βρείτε την εξίσωση της τρίτης πλευράς του.
- 8) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(-1,0) και τέμνουν τις ευθείες $y=x-1$ και $y=x+2$ σε δύο σημεία με απόσταση 3.

- 9) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + (2\lambda + 1)y + (\lambda + 5) = 0$ και $\varepsilon_2 : (2\lambda - 1)x + (\lambda - 2)y + (\lambda - 3) = 0$. Να βρεθεί ο λ ώστε οι ευθείες αυτές να τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. Ποιο είναι τότε το σημείο τομής τους.
- 10) Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο.
- 11) Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τα ισόπλευρα τρίγωνα $BM\Gamma$ και ANB από τα οποία το πρώτο είναι έξω από το τετράγωνο και το δεύτερο μέσα σ' αυτό. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, M, N είναι συνευθειακά.
- 12) α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-3,4), B(-1,0), \Gamma(3,2)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.
β) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 13) Θεωρούμε τα σημεία $A(-1,2) < B(2,3)$ και $\Gamma(4,-1)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με το ύψος AD του τριγώνου.
- 14) Να βρείτε τη γωνία $\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \right)$ των ευθειών: $\varepsilon_1 : 2\mu x - (\mu + 1)y + 1 - 3\mu = 0$ και $\varepsilon_2 : (3\mu + 1)x - (1 - \mu)y + 2 - 6\mu = 0$.
- 15) Το κέντρο ενός τετραγώνου είναι το σημείο $K(1,2)$ και η εξίσωση μιας πλευράς του είναι $x + y - 1 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου.
- 16) Οι πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Να αποδείξετε ότι $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = -3$.
- 17) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1 : x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 3 = 0$.
- 18) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της οποίας κάθε σημείο ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : 8x + 6y - 3 = 0$.
- 19) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $M(3,2)$ και απέχουν από την αρχή O των αξόνων 3 μονάδες.
- 20) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχουν από τα σημεία $A(3,1)$ και $B(-2,2)$.
- 21) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $3x - 2y + 5 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.
- 22) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 4 = 0$ έτσι ώστε οι 3 ευθείες να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.
- 23) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(2\alpha - 1)x + (3\alpha + 4)y + 4\alpha + 9 = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο.
- 24) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(3\lambda - 1, 4 - 5\lambda)$.
- 25) Αν το σημείο $A(x_1, y_1)$ κινείται πάνω στην ευθεία $3x + 5y - 3 = 0$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $M(2x_1 + 1, 5y_1 - 4)$.

- 26) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η βάση $B\Gamma$ και το εμβαδόν είναι σταθερά. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A .
- 27) Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E της διαγωνίου $B\Delta$. Αν Z είναι το συμμετρικό του Γ ως προς το E και φέρουμε τις $ZH \perp AB$, $Z\Theta \perp A\Delta$, να αποδείξετε ότι τα σημεία E , H , Θ είναι συνευθειακά.

ΤΣΟΚΑΝΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ