

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
ΚΕΦ. 2^ο

- 1)** Προσδιορίστε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0
- α) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \sqrt{5+x^2}, & x \leq 2 \\ \eta\mu(\pi x) + \beta, & x > 2 \end{cases} \quad (x_0=2)$ β) $f(x) = \begin{cases} x^3 \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases} \quad (x_0=1)$
- 2)** Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:
- α) $f(x) = \eta\mu(\sqrt{x}) + \sqrt{\eta\mu x}$ β) $f(x) = (\eta\mu x)^x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$
- γ) $f(x) = (\eta\mu x)^{\sin x}, x \in (0, \pi)$ δ) $f(x) = \eta\mu^2 x + \ln^3 x$
- 3)** Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x \cdot |x| + x + 1, x \in \mathbb{R}$
- 4)** Αν $f(x) = \ln(\eta\mu x + \sin x), x \in (0, \frac{\pi}{2})$ να αποδείξετε ότι:
- $$f^{(3)}(x) + 2f'(x) \cdot f''(x) = 0$$
- 5)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης (c) της f ορίζεται εφαπτομένη και ποια όχι.
- 6)** Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης (c) της f ορίζεται εφαπτομένη και ποια όχι όταν:
- α) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 2 \\ 2x^2 - x, & x < 2 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$.
- 7)** Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης (c) της $f(x) = x^2 \ln x$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- 8)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$. Αν $A(1, y_0)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f, g να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f, g να έχουν κοινή εφαπτομένη.
- 9)** Για ποια τιμή του α η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση (c) της $f(x) = x^2 + 2\alpha x + 1$.
- 10)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 2x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

- 11) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - \frac{1}{x} + 1$ και $g(x) = x^2 + x + \alpha$ με γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 αντιστοίχως. Για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της C_1 στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται και στη C_2 .
- 12) Να βρείτε σημείο A στη γραφική παράσταση (c) της $f(x) = \ln x$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της (c) στο A να περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 13) Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(1, -3)$ και οι εφαπτόμενές της στα σημεία αυτά είναι κάθετες.
- 14) Αν C_1, C_2 οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{-1}{x}$ και $g(x) = -x^2 + x - 1$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι κάθετες.
- 15) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης (c) της $f(x) = x^3 - 6x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$ η εφαπτομένη της σχηματίζει με τον άξονα $y'oy$ γωνία $\frac{\pi}{3}$.
- 16) Έστω συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$. Αν είναι $f(a) = f(\beta)$ και $f'(a) = f'(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν 2 τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x_1) = f''(x_2)$.
- 17) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2(2 \ln x - 1) + 8x(\ln x - 1) = -10$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- 18) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x = x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
- 19) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + x^3 + 15x - 25 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- 20) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
- 21) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει $f'(x) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ μια ρίζα στο (a, β) .
- 22) Έστω συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$. Αν είναι $2f(2) = f(1) + f(3)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(x_0) = 0$.
- 23) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f''(x) = 6x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f(2) = 2$.
- 24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + \eta \mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2, 2]$ για την f και έπειτα να το επαληθεύσετε.

25) Αν f παραγωγίσιμη και $-1 \leq f'(x) \leq 1$ να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένα $x > \frac{1}{2}$ με

$$f(x) = x^2.$$

26) Να δειχθεί ότι $1 - eh \leq e^h \leq 1 + eh$ για κάθε $h \in [0, 1]$

27) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f(1) = f(0) + c$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = c$.

28) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

α) είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

β) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) - g(x) = 0$ και $f(x) + g'(x) = 0$

γ) $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί ο τύπος της F .

29) Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} \quad \beta) f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \quad \gamma) f(x) = |x^2 - 3x| + x$$

$$\delta) f(x) = 2 - \sin 2x - 2\sqrt{3} \sin x, x \in [0, 2\pi] \quad \epsilon) f(x) = \begin{cases} e^x - ex & , x \leq 0 \\ x^2 \ln x + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}, x > 0$$

30) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \left(\alpha - \frac{4}{3}\right)x + 2 \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

31) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

32) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει: $2 \ln(\eta \mu x) < \eta \mu^2 x$.

33) Να αποδείξετε ότι $x \ln x + 1 > x$ για κάθε $x > 1$.

34) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}{e^x}, x \in (0, 2\pi) \quad \beta) f(x) = x^x, x > 0$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \eta \mu x - \frac{x}{2} & , -\pi < x \leq 0 \\ \sqrt{3} \left(\sigma \upsilon \nu x + \frac{x}{2} - 1 \right) & , 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = x \ln x + \lambda x, x > 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad \varepsilon) f(x) = |x^2 - 2x| + x$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < -1 \\ 3x + 4 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

- 35)** Για ποια τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + x$ έχει στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = 2$ τοπικά ακρότατα τα οποία να βρεθούν.
- 36)** Για ποια τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$ έχει στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = -2$ τοπικά ακρότατα τα οποία να βρεθούν.
- 37)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + 2(\alpha - \beta)x$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει στο σημείο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση (c) της f να κόβει τον άξονα $y'y$ στο $(0, \beta)$.
- 38)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + (x^2 - a)x^2 + (a - 31)x + 2$.
 α) Να βρείτε τις τιμές των $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει στο σημείο $x_0 = 2$ τοπικά ελάχιστο.
 β) για τις τιμές του a που βρήκατε υπάρχει τιμή για την οποία η f να έχει μέγιστο.
- 39)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει στα σημεία $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{2}$ τοπικά ακρότατα τα οποία να βρεθούν.
 Έπειτα για τις τιμές των α, β που βρήκατε να μελετήσετε τη μονοτονία της f .
- 40)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f και έπειτα να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $x^e \leq e^x$
- 41)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x) = x \ln x$ είναι κυρτή και μη κυρτή.
- 42)** Να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:
 α) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ β) $f(x) = x \cdot |x|$ γ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ δ) $f(x) = |x|^3$
- 43)** Να αποδείξετε ότι τα σ.κ. της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x, x \in \mathbb{R}$ είναι συνευθειακά και να βρείτε και την εξίσωση της ευθείας των σημείων καμπής.
- 44)** Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο $x_0 = 2$ είναι θέση σημείου καμπής της $f(x) = x^3 - (\lambda^2 - \lambda)x^2 + \lambda x + 1 + \lambda^2$.
- 45)** Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + 2x - 1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- 46)** Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2\beta x + 4$ έχει τ.α. στο σημείο $x_1 = 3$ και θέση σημείου καμπής στο σημείο $x_2 = 2$.

- 47)** Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες το σημείο $A(1, -2)$ είναι σ.κ. της $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + (2\alpha - \beta)x + \gamma$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης (c) της f στο A έχει κλίση -9 .
- 48)** Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες το σημείο $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ είναι σ.κ. της $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma, \alpha \neq 0$ και η γραφική παράσταση (c) της f περνάει από το σημείο $(1, 11\sqrt{2})$.
- 49)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 12x + \beta$.
 α) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f έχει ένα σ.κ. με οριζόντια εφαπτομένη. Έχει στην περίπτωση αυτή η f τ.α.
 β) Για ποια τιμή του β το σ.κ. βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.
- 50)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σ.κ. της γραφικής παράστασης (c) της συνάρτησης:
 α) $f(x) = \frac{x}{2} - \eta\mu x, x \in (-\pi, \pi)$ β) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.
- 51)** Να βρεθούν οι ασύμπτωτοι των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
 α) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$
 δ) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{2x + 1} - x$ ε) $f(x) = \frac{|2x^2 + x| + 2x}{x - 2}$
- 52)** Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης (c) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{3x - 1}$.
- 53)** Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η γραφική παράσταση (c) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{3x - 1}$ να μην έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- 54)** Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
 α) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ β) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$ γ) $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$
 δ) $f(x) = |x^2 - 2x|$.