

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΚΕΦ. 1^ο

1) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x}} & \beta) f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{(x+1)\sqrt{x+2}} & \gamma) f(x) = \frac{x+1}{|x|+x} \\ \delta) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}} & \epsilon) f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-1}} & \sigma\tau) f(x) = \log_x(3-x^2) \end{array}$$

2) Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = x^3 - x \quad \beta) f(x) = x^2 + 1 \quad \gamma) f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

3) Να βρείτε τις συναρτήσεις : $f+g$, fg , f/g , g/f αν:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{5-x}, g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$\beta) f(x) = x^2 - 9, g(x) = \sqrt{x+5}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x^2}$$

4) Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - 1} + \eta\mu x, g(x) = \frac{|x|}{|x|-1} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x\sqrt{x^2}}{x^2} + \frac{x}{|x|}, g(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = |x-1| + \sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{(x-1)^2} + |x-1|^{1/2}$$

5) Να εξετάσετε αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και να τις προσδιορίσετε αν:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{9-x^2}, g(x) = \sqrt{2x-1}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{4-x^2}, g(x) = \sqrt{x}-1$$

$$\gamma) f(x) = \frac{4-x}{\sqrt{x}} \text{ με πεδίο ορισμού } A=(0,4], g(x) = 2x^2 - 1 \text{ με πεδίο ορισμού } B=\mathbb{R}$$

$$\delta) f(x) = x^2 + 2 \text{ με πεδίο ορισμού } A=[-10,8], g(x) = 3x - 2 \text{ με πεδίο ορισμού } B=[-2,5]$$

6) Να βρεθεί η αντίστροφη κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις: (αν υπάρχει)

$$\alpha) f(x) = 3 + \sqrt{2x-4} \quad \beta) f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, A=(-1,1) \quad \gamma) f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$$

$$\delta) f(x) = \frac{2x}{4x-3} \quad \epsilon) f(x) = \frac{x}{x+1}, A=[0,2] \quad \sigma\tau) f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, A=(-\infty, 0]$$

$$\zeta) f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x} \quad \eta) f(x) = \ln 2 + e^x - x$$

- 7) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$
- α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$
 γ) να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$
- 8) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:
 α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή γ) η f είναι γνησίως αύξουσα.
- 9) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{4f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2 .
- 10) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και έχει ελάχιστο, να αποδειχθεί ότι έχει και μέγιστο.
- 11) Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$.
 α) να βρείτε τον τύπο της f .
 β) να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^*$
- 12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - 3}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 α) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται αν και μόνο αν $3\alpha + \beta \neq 0$.
 β) να βρεθούν τα α και β ώστε να ισχύει: $f = f^{-1}$.
- 13) α) Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, να αποδείξετε ότι οι $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ είναι επίσης συναρτήσεις 1-1.
 β) Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g \circ f(x) = e^{x^2 - x}$, να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις f, g δεν είναι 1-1.
- 14) α) να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ και $g(x) = \frac{1}{3^x} - 2x$ είναι 1-1.
 β) να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 9} - 2x^2 - 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 2x - 6$.
- 15) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g \circ f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α) να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x - 1)$.
- 16) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f \circ f(x) + f^{2009}(x) = x^{2007}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- 17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$.
 α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.
 γ) να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.
- 18) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f \circ f(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 α) η f είναι αντιστρέψιμη β) $f(0) = 0$ γ) $f^{-1}(x) = f(x) - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 19)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$
 α) να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x^2 + 1}{x + 3}$
- 20)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$
 α) να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(2x+3) + 1 = \frac{1}{2x+3}$
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 \ln x + x^2 < 1$
- 21)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1$
 α) να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x^2} - e^{-3x} > x^2 - 3x$
- 22)** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(2-x) + f(x+4) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να λύσετε :
 α) την εξίσωση $f(x) = 0$
 β) την ανίσωση $f(x^2 - 5) > 0$
- 23)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
 β) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x)^5 + e^{g(x)} - 1 - e^{-x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- 24)** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- 25)** Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο 2 το 3 και ισχύει:
 $f(\alpha) + 2f(\beta) = 9$, να βρείτε τα α και β .