

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ
ΑΝΑΛΥΣΗΣ

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
- A) Να βρείτε τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της f .
- B) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{x}{2}$ είναι αδύνατη.
- Γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x \geq x^e$. Πότε είναι $e^x = x^e$.
- Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = x^e$ και την ευθεία $x=1$.
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- A) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο 0
- B) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- 3) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$, την εφαπτομένη της C στο σημείο $(e, f(e))$ και τις ευθείες $x=1, x=e$.
- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\eta \mu x}{(1 + \sigma \upsilon \nu x)^2}$. Να βρείτε τα ακρότατα της f .
- 5) Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^v$ όπου $v \in \mathbb{N}, v \geq 2$
- 6) A) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - x - 1, x \in \mathbb{R}$
- B) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζουν τα σημεία (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $0 \leq x \leq 1$ και $x - x^2 \leq y \leq e^x - 1$
- 7) Μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ με $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν ισχύει $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{f'(a)}{f'(b)}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε να είναι $f''(\xi) = \frac{[f'(\xi)]^2}{f(\xi)}$.
- 8) A) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[0, a]$ να αποδείξετε ότι
$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a - x) dx$$
- B) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx$

- 9) Α) Να βρείτε την μη μηδενική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) = 2 \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ για κάθε $x > 0$.
 Β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^2 , όπου f η παραπάνω συνάρτηση.
- 10) Ένα λύκειο έχει 360 μαθητές και πρόκειται να κάνει μια ημερήσια εκδρομή, στην οποία θα πρέπει να συμμετάσχουν τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών. Αν δηλώσει συμμετοχή ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που απαιτείται, τότε το κόστος είναι 3600 δρχ. ανά μαθητή. Για κάθε επιπλέον μαθητή το κόστος ελαττώνεται κατά 10 δρχ. ανά μαθητή. Πόσοι μαθητές πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε το πρακτορείο ταξιδίων να έχει α) μέγιστα έσοδα β) ελάχιστα έσοδα.
- 11) Να λύσετε τη εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$
- 12) Α) Να αποδείξετε ότι ένας πραγματικός αριθμός ρ είναι διπλή ρίζα πολυώνυμου $P(x)$ αν και μόνο αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του $P(x)$ και του $P'(x)$.
 Β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 1)$ διαιρείται με το $(x-1)^2$
- 13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)}$
 Α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κοιλότητα.
 Β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της f από 1 έως e .
- 14) Ένας πυρηνικός αντιδραστήρας αποβάλλει ποσότητα $f(t)$ ραδιενεργών αποβλήτων σ' ένα ποτάμι με ρυθμό $\frac{\ln t}{(2t+1)^2}$ κιλά ανά ημέρα, όπου t είναι οι μέρες λειτουργίας του εργοστασίου. Αν το εργοστάσιο λειτουργήσει ένα μήνα, να βρείτε την ποσότητα αποβλήτων που θα πέσει στο ποτάμι τις τελευταίες 10 μέρες της λειτουργίας του.
- 15) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι θετικοί αριθμοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_n^x \geq n$, $n \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = 1$
- 16) Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$f(x) = 2x^3 + \int_0^x e^{-u} \cdot f(x-u) du$$
- 17) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt.$$
- 18) Δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει
$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta g(x) dx.$$
 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

- 19)** Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha > 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
- 20)** Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) . Επίσης είναι $g(\alpha) \neq g(\beta)$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να είναι: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}$
- 21)** Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\log_a x \leq x - 1$ ($0 < a \neq 1$), να αποδείξετε ότι $a = e$.
- 22)** Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$ ($\alpha > 0$), να αποδείξετε ότι $a = e$.
- 23)** Αν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\frac{\kappa}{5} + \frac{\lambda}{2} + \mu = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\kappa x^4 + \lambda x + \mu = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- 24)** Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$ $0 < \alpha \neq 1$.
 Β) Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.
- 25)** Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$
 Β) Αν $\alpha > \beta > e$ να αποδείξετε ότι $\alpha^\beta < \beta^\alpha$.
 Γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{3}}$ και 3 .
- 26)** Α) Να λύσετε την εξίσωση $(x+1)^{1994} = x^{1994} + 1$
 Β) Αν ο κ είναι θετικός άρτιος να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^\kappa = 1 + x^\kappa$ έχει μόνο μια ρίζα.
- 27)** Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος $K(x) = \frac{\alpha}{4} x^3$, $x > 0$ όπου η παράμετρος α παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος είναι $A(x) = x^2$.
 Α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.
 Β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.
- 28)** Ένα πλοίο Π_1 βρίσκεται 50 Km ανατολικά ενός πλοίου Π_2 . Το Π_1 πλέει δυτικά με ταχύτητα 15 Km/h ενώ το Π_2 πλέει νότια με ταχύτητα 20 Km/h. Σε πόσο χρόνο η απόστασή τους θα είναι η μικρότερη δυνατή.
- 29)** Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\frac{1}{2}x^2 + 20x + 28$ και η τιμή πώλησης κάθε προϊόντος είναι $35 - \frac{1}{3}x$. Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία το συνολικό κέρδος είναι μέγιστο.
- 30)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

31) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \alpha e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

A) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = -ex$.

B) Γι' αυτή την τιμή του α να αποδείξετε ότι $f'(0) = f''(0) = 0$

32) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\alpha}{e^x}, \alpha \in \mathbb{R}^*$ και C η γραφική της παράσταση.

A) Να αποδείξετε ότι η C έχει, για κάθε τιμή του α , μια πλάγια ασύμπτωτη.

B) Για $\alpha < 0$ να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σ' ένα σημείο x_0

Γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου $M(x_0, f(x_0))$.

33) Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ και $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

34) Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

A) Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - c}, c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g'(x_0) = 0$.

B) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

35) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ με $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f .

36) Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με $f(x) - g(x) = x - 4, x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της f όταν το $x \rightarrow +\infty$.

Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x) + 3x + \eta \mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της g όταν το $x \rightarrow +\infty$.

37) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}, z \in \mathbb{C}$ με $z = \alpha + \beta i, \alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

β) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f αν $|z+1| > |z-1|$.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.