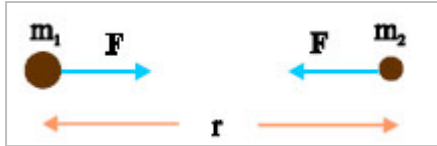


ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΓΕΝΙΚΑ



Δυο σημειακές μάζες που απέχουν απόσταση r **έλκονται** με δύναμη που είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών και αντίστροφα ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

Όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $G = 6,673 \times 10^{-13} \text{ N}\cdot\text{m}^2 / \text{kg}^2$.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

Η δύναμη αυτή, όπως και η δύναμη Coulomb, είναι **διατηρητική**...

Πώς μια μάζα 'αντιλαμβάνεται' ότι κάπου υπάρχει μια άλλη και αλληλεπιδρά με αυτή ; Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών περιγράφεται με την έννοια του πεδίου.

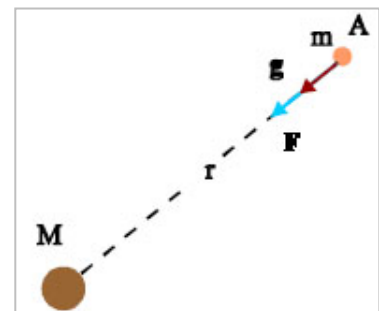
- Κάθε μάζα δημιουργεί γύρω της πεδίο.
- Αν κάποια μάζα βρεθεί μέσα στο πεδίο, το πεδίο της ασκεί δύναμη.
- Το πεδίο που δημιουργείται από μάζες ονομάζεται βαρυτικό πεδίο ή πεδίο βαρύτητας.

Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος εκείνος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη.

ΕΝΤΑΣΗ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ (λέγε με επιτάχυνση βαρύτητας !!!)

Η ένταση του πεδίου g , που δημιουργεί η σημειακή μάζα M έχει σε κάθε σημείο κατεύθυνση προς τη μάζα-πηγή M .

Αν στη θέση A του πεδίου της M , βρεθεί μια άλλη μάζα m , τότε αυτή θα δεχτεί δύναμη $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{g}$ (2)



$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Είναι προφανές ότι οι δυο εξισώσεις (1), (2) που έχουμε ήδη γράψει, οδηγούν στη αναλυτική μορφή της έντασης, όπου M η μάζα-πηγή του πεδίου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Αν η μάζα-πηγή δεν είναι σημειακή, αλλά ομογενής σφαίρα ή σφαιρικός φλοιός, τότε η απόσταση r σε όλες τις προαναφερόμενες εξισώσεις, μετράτε από το κέντρο της σφαίρας. Σε κάθε περίπτωση μελετάμε το τι συμβαίνει **έξω** από την μάζα-πηγή και όχι στο εσωτερικό της...

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Έστω μια μάζα M που είναι η πηγή βαρυτικού πεδίου. Η μάζα μπορεί να είναι σημειακή ή σφαιρική. Έστω A ένα σημείο σε απόσταση r από την πηγή.

Λέμε δυναμικό στο σημείο A (συμβολισμός V_A), ένα μονόμετρο μέγεθος $V_A = -\frac{GM}{r} < 0$, που μας δίνει την δυνατότητα να εργαστούμε ενεργειακά, υπολογίζοντας έργο (W) και ενέργεια (U).

► Ποιο έργο υπολογίζουμε;

i) Υπολογίζουμε το έργο της δύναμης του πεδίου για την μετάβαση μιας μάζας m_o από το A στο άπειρο! $W_{A \xrightarrow{\text{δύναμης πεδίου}} \infty} = m_o V_A$

Π.χ. Το δυναμικό σε ένα σημείο βαρυτικού πεδίου είναι $V_A = -6 \text{ joule/kg}$. Αν θελήσουμε να μεταφέρουμε μάζα $m_o = 60 \text{ kg}$, από το A μέχρι το άπειρο, πρέπει να δώσουμε τουλάχιστον ενέργεια ίση με 360 joule , μας λέει το $\theta_{\mu\kappa\epsilon}$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} K_{\infty} - K_A &= W_{A \xrightarrow{\text{δύναμης πεδίου}} \infty} + \text{προφερόμενη δική μας} \rightarrow 0 - 0 \\ &= m_o V_A + \text{προσφερόμενη δική μας ενέργεια} \rightarrow \text{Προσφερόμενη} \\ &= -60 \cdot (-6) = 360 \text{ joule} \end{aligned}$$

ii) Υπολογίζουμε το έργο της δύναμης του πεδίου για μετάβαση μιας μάζας m_o από ένα σημείο A σε κάποιο άλλο σημείο B του πεδίου.

$$W_{A \xrightarrow{\text{δύναμης πεδίου}} \infty} = m_o (V_A - V_B)$$

Χμ! και γιατί νοιαζόμαστε για τα έργα;

Απάντηση: Διότι πώς αλλιώς θα εργαστούμε με $\theta_{\mu\kappa\epsilon}$;

► Ποια ενέργεια υπολογίζουμε;

Έστω ότι έχουμε ένα βαρυτικό πεδίο που φτιάχνει κάποια μάζα ή κάποιες μάζες. Έστω επίσης ένα σημείο A του πεδίου αυτού, με τιμή δυναμικού V_A . Στο σημείο αυτό τοποθετούμε μια μάζα m_o .

Η δυναμική βαρυτική ενέργεια στο σύστημα που οφείλεται στη παρουσία της m_o στο σημείο A , δίνεται από την εξίσωση:

$$U = m_o V_A \quad (1)$$

Ας δούμε πώς διαμορφώνεται η (1) όταν υπάρχει μια μάζα πηγή M .

$$U = m_o V_A \rightarrow U = m_o \left(-\frac{GM}{r_A} \right) = -G \frac{M \cdot m_o}{r_A} \quad (2)$$

...Και αν έχουμε πολλές πηγές:

$$U = m_o V_A \rightarrow U = m_o \left\{ \left(-\frac{GM_1}{r_{1A}} \right) + \left(-\frac{GM_2}{r_{2A}} \right) + \left(-\frac{GM_3}{r_{3A}} \right) + \dots \right\} = \kappa\lambda\pi \quad (3)$$

Χμ! και γιατί νοιαζόμαστε για την U ;

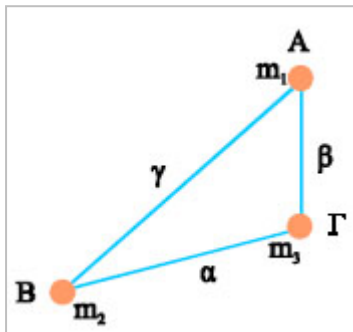
Απάντηση: Διότι πώς αλλιώς θα εργαστούμε με $\alpha\delta\mu\epsilon$ ή με $\alpha\delta\epsilon$;

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Η **δυναμική ενέργεια** συστήματος δύο υλικών σημείων με μάζες m_1, m_2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r , αποδίδεται από τη διπλανή εξίσωση.

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Το αρνητικό πρόσημο στη σχέση υποδηλώνει ότι για να κάνουμε άπειρη την απόσταση δυο μαζών που βρίσκονται αρχικά σε απόσταση r πρέπει να προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα.



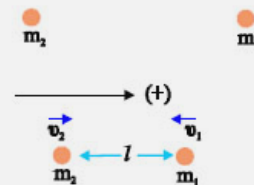
Η δυναμική ενέργεια συστήματος τριών υλικών σημείων υπολογίζεται ως άθροισμα όλων των δυναμικών ενεργειών όλων των ζευγαριών μάζας.

Έτσι :

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{\gamma} - G \frac{m_1 m_3}{\beta} - G \frac{m_2 m_3}{\alpha}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-13

Δύο σφαιρικές μάζες m_1 και m_2 ηρεμούν σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μια στην άλλη αρχίζουν να κινούνται πλησιάζοντας μεταξύ τους. Αν κατά τη διάρκεια της κίνησής τους δεν ασκείται σε αυτές άλλη δύναμη, να βρείτε τις ταχύτητες των μαζών τη στιγμή που βρίσκονται σε απόσταση l μεταξύ τους. Δίνεται το G .



Εφόσον οι μάζες δε δέχονται άλλες δυνάμεις εκτός από τη μεταξύ τους ελκτική δύναμη, το σύστημά τους είναι απομονωμένο και η ορμή του διατηρείται. Αν θεωρήσουμε ως αρχική θέση τη θέση όπου οι μάζες ηρεμούν και ως τελική αυτή όπου οι μάζες απέχουν μεταξύ τους απόσταση l θα ισχύει:

$$P_{\text{αρχ.}} = P_{\text{τελ.}}$$

Θεωρώντας θετική την κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0 = m_2 v_2 - m_1 v_1$$

Λύνοντας ως προς v_1 έχουμε

$$v_1 = v_2 \frac{m_2}{m_1} \quad (5.58)$$

Το πεδίο βαρύτητας είναι διατηρητικό, δηλαδή η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή

$$U_{\text{αρχ.}} + K_{\text{αρχ.}} = U_{\text{τελ.}} + K_{\text{τελ.}}$$

οπότε

$$0 = -G \frac{m_1 m_2}{l} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

αντικαθιστώντας τη v_1 από την (5.58) βρίσκουμε

$$0 = -G \frac{m_1 m_2}{l} + \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{m_1} v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{l(m_1 + m_2)}}$$

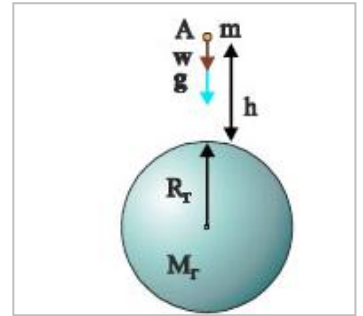
και από την (5.58) βρίσκουμε

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{l(m_1 + m_2)}}$$

Στα συστήματα η ΑΔΟ και η ΑΔΜΕ είναι ...βούτυρο στο φωμί !

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

Ξεκινάμε από τη γνωστή εξίσωση για την **ένταση** του βαρυτικού πεδίου (την γνωστή μας **επιτάχυνση βαρύτητας**) :



$$g = G \frac{M_{GH}}{r^2} = G \frac{M_{GH}}{(R_{GH} + h)^2} = \left(G \frac{M_{GH}}{(R_{GH} + h)^2} \right)$$

$$= \{ \text{αν το } h \text{ θεωρηθεί πολύ μικρότερη της γήινης ακτίνας} \} \cong \left(G \frac{M_{GH}}{(R_{GH})^2} \right)$$

$$= g_o \cong 9,81 \text{ m/sec}^2$$

Δηλαδή κοντά στην επιφάνεια της σφαιρικής Γης, η ένταση έχει σταθερό μέτρο.

Η γνωστή εξίσωση **U=m.g.h** ισχύει κάτω από δυο παραδοχές :

- Εργαζόμαστε κοντά στη επιφάνεια της Γης όπου το πεδίο θεωρείται ομογενές και η Γη επίπεδη και αυτό σημαίνει κατακόρυφο g με φορά προς τα κάτω και τιμή $g=g_o$!
- Η δυναμική ενέργεια είναι **μηδέν** όταν μια μάζα βρεθεί στη επιφάνεια της Γης ή σε κάποια άλλη –αυθαίρετη οριζόντια επιφάνεια- που ορίζουμε εμείς και αποδίδουμε σε αυτή $h=0$.

Ας απαντήσουμε στο ερώτημα : Πότε θα εργάζομαι με τη σχέση $U=mgh$ και πότε με τη σχέση $U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$;

- Η πρώτη θέλει ‘ομογενές’ βαρυτικό πεδίο και η δεύτερη ανομοιογενές.
- Η πρώτη αφορά προβλήματα που συμβαίνουν σε μια μικρή περιοχή του πλανήτη, του άστρου, ... ενώ η δεύτερη αφορά –συνήθως- μεγάλες αποστάσεις.
- Η πρώτη θέλει σημείο αναφοράς μηδενικής τιμής σε επιφάνεια αυθαίρετα ορισμένη ($h=0$), ενώ η δεύτερη στο άπειρο.
- Η πρώτη είναι στο περίπου και μπορεί να «παραχθεί» από τη δεύτερη με προσεγγιστικούς όρους.

Αρκετά ...

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ

Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί ένα αντικείμενο μάζας m , από την επιφάνεια της Γης ώστε να διαφύγει οριστικά από το πεδίο βαρύτητας της Γης;

Για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ότι η Γη δεν κινείται, θα αγνοήσουμε τις βαρυτικές επιδράσεις από τα άλλα ουράνια σώματα και θα αγνοήσουμε την αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Εφόσον το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων (Γη και σώμα) διατηρείται. Επομένως κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο θέσεων θα ισχύει

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της Γης και για το άπειρο (εκεί όπου δεν υπάρχει πλέον βαρυτική επίδραση και η δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη είναι μηδέν $U_2 = 0$). Η **ελάχιστη τιμή** της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα είναι εκείνη για την οποία το σώμα θα φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, άρα $K_2 = 0$

Από την (3) έχουμε

$$K_1 + U_1 = 0 + 0 \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{2} m v_{\delta}^2 + \left(-G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}} \right) = 0$$

Λύνοντας ως προς v_{δ} βρίσκουμε

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} = 11,2 \text{ km/s} = 40\,320 \text{ km/h}$$

ΜΑΥΡΕΣ ΟΠΕΣ

...Ας βρούμε τι ακτίνα πρέπει να έχει ένα ουράνιο σώμα μάζας M ώστε να μην επιτρέπει σε τίποτα να διαφύγει από την επιφάνειά του.

Η μεγαλύτερη ταχύτητα στη φύση είναι η ταχύτητα του φωτός $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Αν στη σχέση $v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ που δίνει την ταχύτητα διαφυγής θέσουμε $v_\delta = c$ και λύσουμε ως προς R βρίσκουμε :

$$R_\delta = \frac{2GM}{c^2}$$

Η ακτίνα αυτή είναι γνωστή με το όνομα **ακτίνα Schwarzschild**. Ένα ουράνιο σώμα μάζας M με ακτίνα μικρότερη από αυτή την ακτίνα δεν επιτρέπει σε τίποτε, ούτε καν στο φως, να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητάς του. Ένα τέτοιο σώμα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμο κάνει όμως αντιληπτή την παρουσία του από τις ισχυρότατες βαρυτικές έλξεις που ασκεί στον περίγυρό του. Τέτοια σώματα στη σύγχρονη φυσική χαρακτηρίζονται **μαύρες τρύπες**.

Από το σημείο Α του πεδίου βαρύτητας της Γης, που βρίσκεται σε ύψος $h=R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης (R_Γ η ακτίνα της Γης), βάλλεται προς το Διάστημα ένα σώμα με ταχύτητα $v_0=16 \times 10^3$ m/s. Να εξετάσετε αν το σώμα θα διαφύγει από τη βαρυτική έλξη της Γης. Αν θα διαφύγει να βρείτε την ταχύτητά του όταν φτάσει σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη. Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma=6400$ km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της $g_0=10$ m/s².

Απάντηση : α) Η ταχύτητα διαφυγής, σε ύψος h , δίνεται από τη σχέση $v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$.

Αν στη θέση του h βάλουμε την ακτίνα της Γης

$$\text{έχουμε} \quad v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{2R_\Gamma}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \quad (3.62)$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι

$$g_0 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^2} \quad \text{οπότε} \quad GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2 \quad (3.63)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας την (3.63) στην (3.62) έχουμε} \quad v_\delta = \sqrt{g_0 R_\Gamma} = 8 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Επειδή $v_0 > v_\delta$ το σώμα θα διαφύγει.

β) Έστω v η ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στο άπειρο. Για τον υπολογισμό της θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο Α μέχρι το άπειρο.

$$W = K_\infty - K_A \quad \text{οπότε} \quad (V_A - V_\infty)m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3.64)$$

$$\text{Είναι} \quad V_\infty = 0 \quad \text{και} \quad V_A = -\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \quad \text{που λόγω της (3.63) γίνεται} \quad V_A = -\frac{g_0 R_\Gamma}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.64) έχουμε

$$-g_0 R_\Gamma = v^2 - v_0^2 \quad \text{επομένως} \quad v = \sqrt{v_0^2 - g_0 R_\Gamma} = 8\sqrt{3} \times 10^3 \text{ m/s}$$