

Ραβδολογία.

Πρόλογος.

Οι πρόσφατες οδηγίες βάζουν τις ράβδους που κινούνται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μέσα στο παιχνίδι.

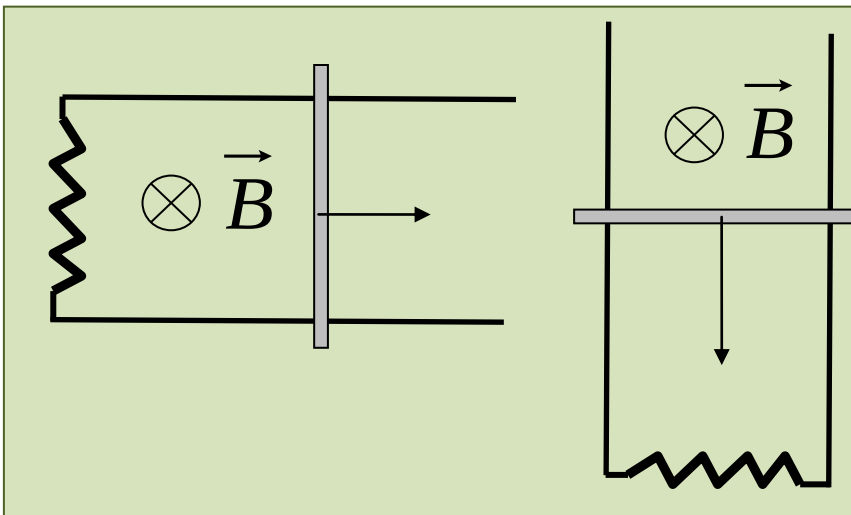
Όχι όλες τις εκδοχές. Όχι ράβδους που τροφοδοτεί κάποια πηγή. Ο 2^{ος} κανόνας Κίρχωφ παραμένει εκτός νόμου.

Όχι κινήσεις σε κεκλιμένα επίπεδα. Όχι στρεφόμενες ράβδους.

Πάντως η είσοδός τους γεννά, ή μάλλον επαναφέρει, ερωτήματα και τεχνικές που εμπλουτίζουν το μάθημα. Η ποικιλία είναι μεγαλύτερη αυτής των κυμάτων. Τόσο μεγαλύτερη που σκέφτεται κάποιος ότι τζάμπα έπεσαν τα κύματα υπέρ πίστεως. Ούτως ή άλλως η είσοδος του Ηλεκτρομαγνητισμού θα τα εκτόπιζε. Φαίνεται μάλιστα πως θα έχουμε έναν σοβαρό παίκτη που θα ανταγωνίζεται τις ταλαντώσεις για τη θέση του δευτεραγωνιστή. Ένα έξυπνο θέμα μάλιστα από τον Ηλεκτρομαγνητισμό θα μπορούσε να εκτοπίσει κάποια χρονιά και την μεγάλη πρωταγωνίστρια.

Ας θυμηθούμε κάποια, έστω τροποποιημένα.

Κάποια σενάρια.



Στο αριστερό σχήμα όλα εξελίσσονται σε οριζόντιο επίπεδο. Μια δύναμη τραβάει τον αγωγό όπως δείχνει το σχήμα. Μάλλον στο μέσον του, ώστε να μη στρίβει.

Στο δεξί σχήμα το επίπεδο είναι κατακόρυφο.

Τη δουλειά την κάνει το βάρος.

Τώρα ζητάς ότι θέλεις. Ρεύματα, φορτία, διαφορές δυναμικού, ισχείς, ρυθμούς μεταβολής δυναμικής τε και κινητικής ενέργειας και ότι άλλο σκεφτείς.

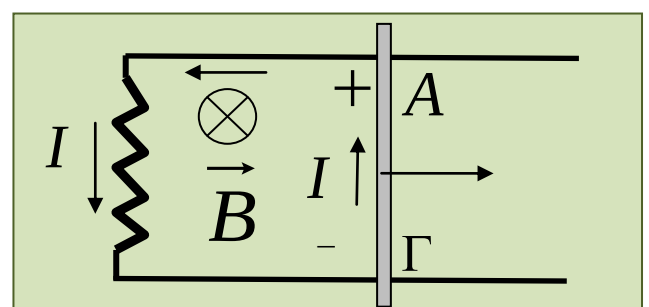
Η ποικιλία αυτή φέρνει από το παράθυρο έναν αέρα δικαιοσύνης. Όχι μαθαίνει τρία τυποποιημένα η εκπαιδευμένη μαϊμού και ανταπεξέρχεται σε Εξετάσεις στημένες ειδικά ώστε να ανταπεξέλθει.

Με τις πολλές ώρες του μαθήματος οιοδήποτε παιδί μπορεί να διδαχθεί άνετα τα σχετικά, χωρίς να χρειάζεται να παρατήρει την Β' Λυκείου και να αρχίσει μικρόθεν την εκπαίδευση σε θέματα Γ' Λυκείου. Θα δούμε μάλιστα ότι κάτι τέτοιο μπορεί να καταστεί επικίνδυνο. Ένας μερακλής να βρεθεί και θα τον κάνει να μετανιώσει πικρά που παράτησε την Γεωμετρία και την πολική τάση πηγής, χάριν των κρούσεων και των ταλαντώσεων, που άρχισε να διδάσκεται στα μέσα ή και στην αρχή της Β'. Ένας μερακλής, όχι δύο.

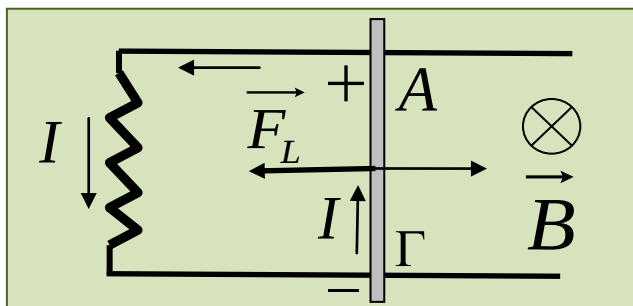
Πολικότητα.

Έστω ότι η κίνηση γίνεται όπως στο σχήμα.

Το εμβαδόν αυξάνεται και μαζί του η μαγνητική ροή.



Το επαγωγικό ρεύμα πρέπει να δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο αντίθετο του υπάρχοντος, έτσι ώστε να «εμποδίσει» την αύξηση της ροής. Συνεπώς το ρεύμα πρέπει να είναι αριστερόστροφο, όπως στο σχήμα.



Μια άλλη οπτική:

Το επαγωγικό ρεύμα πρέπει να είναι τέτοιας φοράς ώστε να «γεννηθεί» δύναμη Laplace που αντιστέκεται στην κίνηση.

Βρίσκουμε με τον κανόνα των τριών δαχτύλων τη φορά του ρεύματος. Συμφωνεί με την προηγουμένως προσδιορισθείσα.

Προσοχή λιγάκι εδώ:

Ποια είναι η πολικότητα;

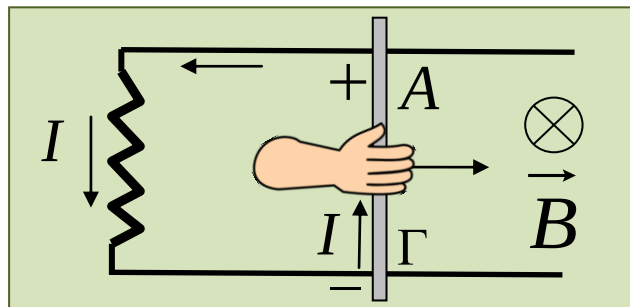
Όταν έχουμε μια μπαταρία με πόλους A και Γ, κοιτάζουμε έξω από αυτήν και όχι μέσα. Αν το ρεύμα έξω πηγαίνει από το A στο Γ, θετικός πόλος είναι ο A. Φανταζόμαστε τη ράβδο σαν μπαταρία και λέμε ότι η πολικότητα είναι (+) στο A και (-) στο Γ.

Προσοχή και εδώ:

Πολλά κόλπα κυκλοφορούν.

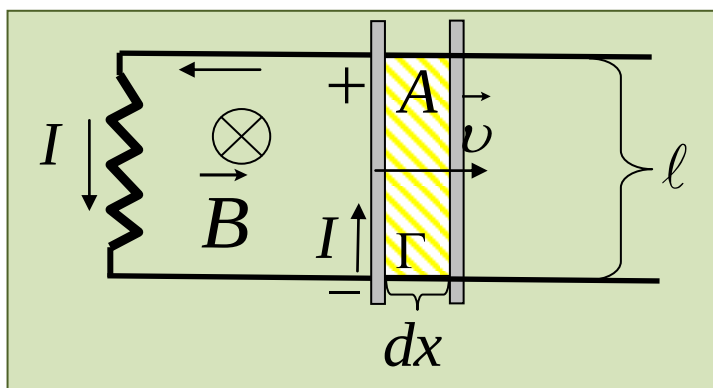
Ένα από αυτά λέει να πάρεις το δεξί σου χέρι και να το βάλεις έτσι σαν να θέλεις να καρφώσεις το B και τα δάχτυλα να δείχνουν την φορά κίνησης.

Ο αντίχειρας μας δείχνει που να τοποθετήσουμε το συν (+).



Φοβάμαι ότι θα χάσεις μόρια. Αν εγώ σου είχα κάνει την ερώτηση, ας σου πω ότι αδιαφορώ παγερά για το ποια είναι η πολικότητα. Θέλω να σε εξετάσω ώστε να διαπιστώσω αν γνωρίζεις τον κανόνα του Lenz και όχι αν έχεις μάθει κολπάκια από κάποιον καθηγητή σου. Δεν υπεκφεύγουμε χωρίς κόστος όταν δεχόμαστε τέτοιες ερωτήσεις.

Υπολογισμός ΗΕΔ.



Δεν θέλω να μου πεις ότι η ΗΕΔ είναι ίση με Μπουλ.

Θέλω να το εξάγεις από τον νόμο του Faraday.

Κάποια στιγμή η ταχύτητα είναι u .

Την επόμενη στιγμή όμως;

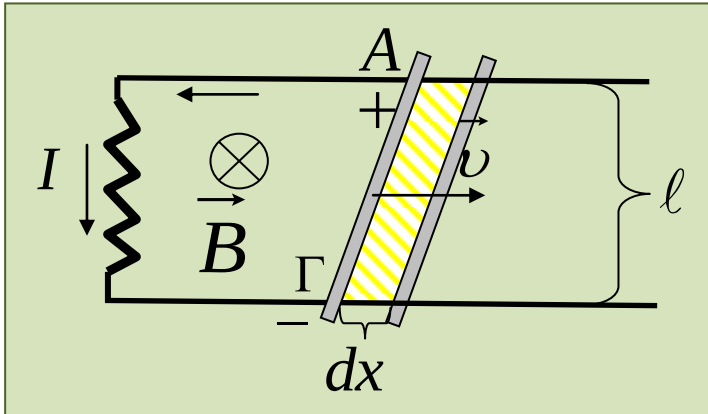
Αν η ταχύτητα είναι σταθερή τότε $E_{\text{επ}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Αν δεν είναι σταθερή, η προηγούμενη σχέση δίνει τη μέση ΗΕΔ.

Αν θέλεις τη στιγμιαία γράψε:

$$|E_{\text{ετ}}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \ell \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot \ell \cdot v$$

Προσοχή στο ότι ℓ είναι η απόσταση των δύο παράλληλων αγωγών και όχι το μήκος του αγωγού.



Αν ο αγωγός δεν είναι κάθετος στις «ράγες» τότε:

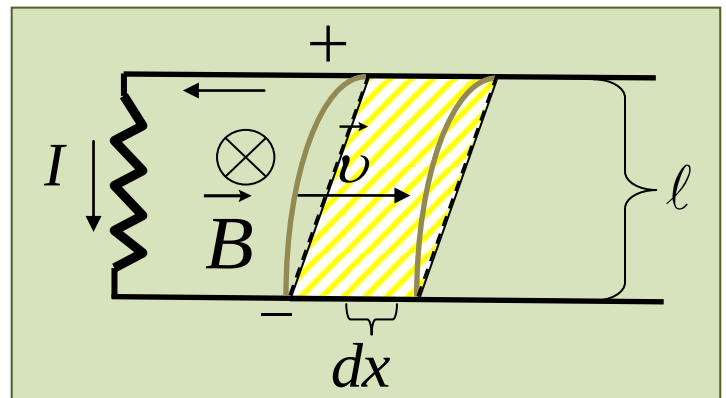
$$|E_{\text{ετ}}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \ell \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot \ell \cdot v$$

Προσοχή δηλαδή στο ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο πλευρά επί ύψος και όχι πλευρά επί πλευρά. Εδώ το ύψος είναι η απόσταση των δύο παράλληλων αγωγών και όχι το μήκος του αγωγού από ράγα σε ράγα.

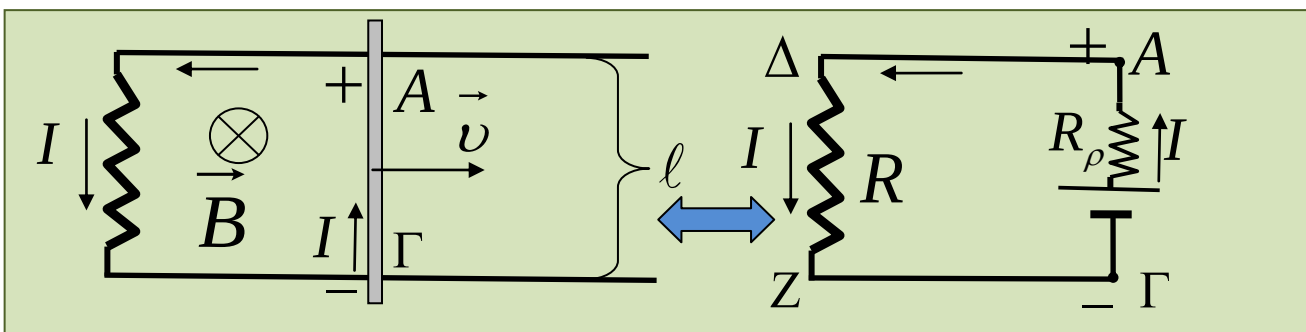
Αν ο αγωγός έχει περίεργο καμπύλο σχήμα τότε το εμβαδόν που διαγράφει είναι ίσο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. Αυτό είναι εμφανές διότι αφαιρέσαμε αριστερά και προσθέσαμε δεξιά το ίδιο σχήμα. Έτσι πάλι:

$$|E_{\text{ετ}}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \ell \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot \ell \cdot v$$

Βρήκαμε την ΗΕΔ, ας δούμε τι θα την κάνουμε.



Υπολογισμός ρεύματος και διαφοράς δυναμικού.



Κατασκευάζουμε το «ισοδύναμο» κύκλωμα. Αντικαθιστούμε τη ράβδο με μία πηγή ίδιας πολικότητας, σε σειρά με την αντίστασή της. Δηλαδή η πηγή μας έχει εσωτερική αντίσταση όση η αντίσταση της ράβδου.

$$\text{Έτσι } I = \frac{B \cdot v \cdot \ell}{R + R_\rho}$$

$$\text{Η } V_{\text{ΑΓ}} \text{ είναι η πολική τάση της πηγής. Είναι ίση με } V_{\text{ΑΓ}} = B \cdot v \cdot \ell - I \cdot R_\rho = B \cdot v \cdot \ell - \frac{B \cdot v \cdot \ell}{R + R_\rho} \cdot R_\rho = B \cdot v \cdot \ell \cdot \frac{R}{R + R_\rho}.$$

Το τελευταίο θα μπορούσαμε να το εξάγουμε αν σκεφτόμασταν ότι $V_{ΑΓ} = V_{ΑΖ} = I \cdot R = B \cdot v \cdot \ell \cdot \frac{R}{R + R_{\rho}}$.

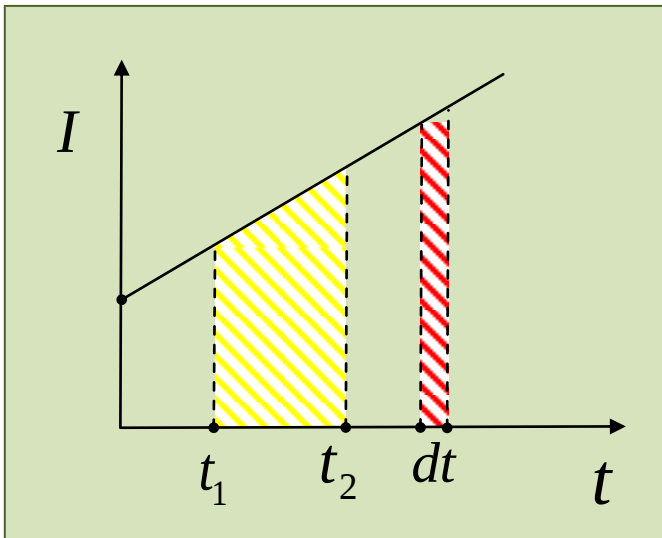
Φυσικά θα μπορούσαμε να βγάλουμε το ίδιο αν βλέπαμε ότι οι δύο αντιστάσεις «σχηματίζουν» έναν διαιρέτη τάσης. Είναι όμως κάπως εξεζητημένο και καλύτερα να το αποφύγεις.

Υπολογισμός φορτίου.

Σου ζητούν ίσως να βρεις το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή της ράβδου από την στιγμή t_1 ως την t_2 .

Αν η ένταση του ρεύματος είναι σταθερή τότε η απάντηση είναι απλή. $\Delta Q = I \cdot \Delta t = I \cdot (t_2 - t_1)$.

Αν η ένταση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο, κάνουμε την γραφική παράσταση I - t :



Το στοιχειώδες φορτίο σε χρόνο dt είναι ίσο με:

$$dQ = I \cdot dt$$

Είναι ίσο με το στοιχειώδες κόκκινο εμβαδόν.

Το ολικό φορτίο είναι άθροισμα στοιχειωδών εμβαδών, δηλαδή το εμβαδόν κάποιου χωρίου.

Εν προκειμένω το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή της ράβδου από την στιγμή t_1 ως την t_2 είναι ίσο με το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζιού. Ήτοι:

$$\Delta Q = \frac{I(t_1) + I(t_2)}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

Αν δεν έχουμε κάποια από τις προηγούμενες καταστάσεις;

Αν η σχέση I - t δεν είναι απλή ή είναι άγνωστη;

Αν το εμβαδόν της καμπύλης υπολογίζεται με Μαθηματικά που δεν γνωρίζετε;

Το φορτίο ΔQ που διέρχεται από κάποια διατομή βρίσκεται από την σχέση $\Delta Q = \bar{I} \cdot \Delta t$, όπου $\bar{I}$ η μέση ένταση του ρεύματος στο επίμαχο χρονικό διάστημα. Ισχύει ότι $\bar{I} = \frac{\overline{E_{\varepsilon\pi}}}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_{o\lambda}} \left(-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right)$.

$$\text{Έτσι } Q = |\bar{I}| \cdot \Delta t = \frac{|\overline{E_{\varepsilon\pi}}|}{R_{o\lambda}} \cdot \Delta t = \frac{|\Delta \Phi|}{R_{o\lambda}}$$

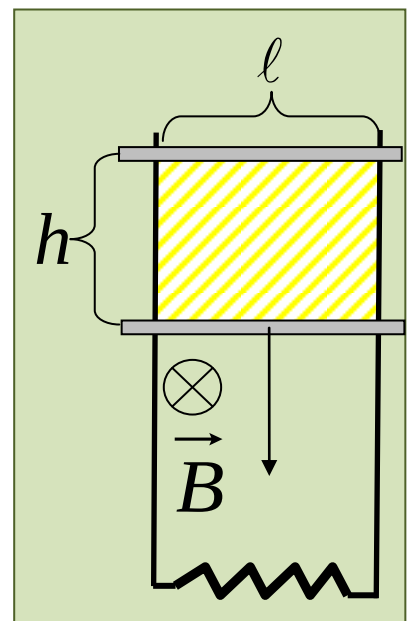
Ας δούμε μια εφαρμογή:

Το φορτίο είναι:

$$Q = \frac{|\Delta \Phi|}{R_{o\lambda}} = \frac{B \cdot \Delta S}{R_{o\lambda}} = \frac{B \cdot h \cdot \ell}{R + R_{\rho}}$$

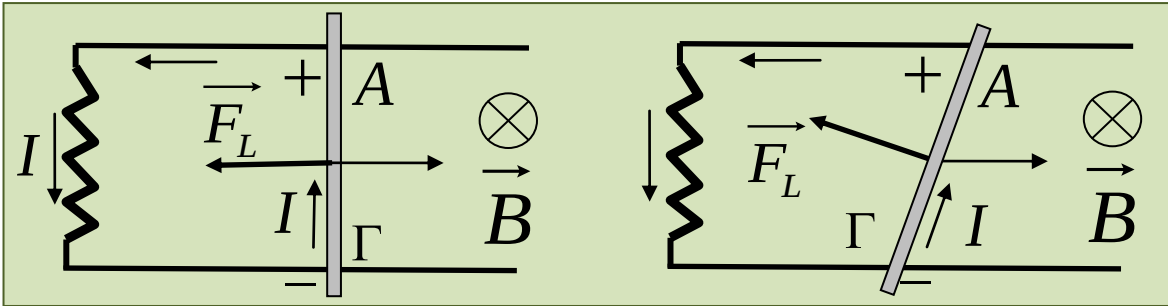
Έτσι γνωρίζοντας πόσα μέτρα έπεσε η ράβδος, γνωρίζουμε το φορτίο.

Ο υπολογισμός του h συναρτήσει του χρόνου δεν είναι εύκολος.



Η δύναμη Laplace.

Είναι κάθετη στη ράβδο. Στο μέσον της, αν το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές.



Είναι ίση με:

$$F_L = B \cdot I \cdot \ell$$

Είδαμε ότι:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{ολ}}$$

Ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή που δείχνει το σχήμα.

Η κίνηση προκαλείται από κάποια δύναμη $\vec{F}$.

Δεν υπάρχει κάποια πηγή η οποία τροφοδοτεί τη ράβδο και προκαλεί την κίνησή της.

$$\text{Είδαμε ότι } F_L = B \cdot I \cdot \ell \text{ και } I = \frac{B \cdot v \cdot \ell}{R + R_\rho}$$

$$\text{Έτσι } F_L = \frac{B^2 \cdot \ell^2}{R + R_\rho} \cdot v$$

Μια δύναμη αντίθετη της ταχύτητας και έχουσα μέτρο ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας.

Είναι ότι πρέπει για να παίξει τον ρόλο της δύναμης απόσβεσης σε μία ταλάντωση.

Αν αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη, η δύναμη Laplace είναι αρχικά μηδενική. Η εξωτερική δύναμη υπερσχύει της Laplace και η ράβδος επιταχύνεται. Όσο αυξάνεται η ταχύτητα, αυξάνεται και η δύναμη Laplace.

Η επιτάχυνση μειώνεται μέχρι μηδενισμού της. Μηδενισμό έχουμε όταν:

$$F_L = F \Rightarrow \frac{B^2 \cdot \ell^2}{R + R_\rho} \cdot v = F \Rightarrow v = F \cdot \frac{R + R_\rho}{B^2 \cdot \ell^2}$$

Η ταχύτητα δεν αυξάνεται άλλο. Η τιμή αυτή της ταχύτητας $v_{op} = F \cdot \frac{R + R_\rho}{B^2 \cdot \ell^2}$ ονομάζεται οριακή ταχύτητα.

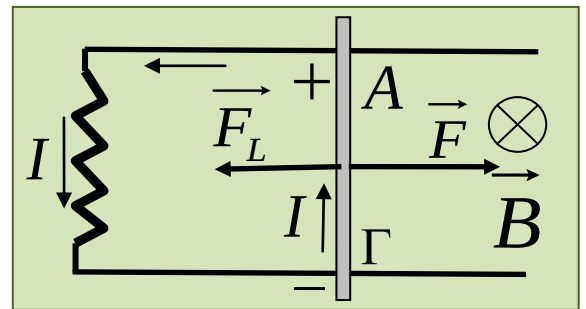
Απώλειες.

Με ποιο ρυθμό η αντίσταση-δύναμη Laplace αφαιρεί ενέργεια;

$$\frac{dW_{F_L}}{dt} = - \frac{F_L \cdot dx}{dt} = - \frac{B^2 \cdot \ell^2}{R + R_\rho} \cdot v \cdot \frac{v \cdot dt}{dt} = - \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v^2}{R + R_\rho}$$

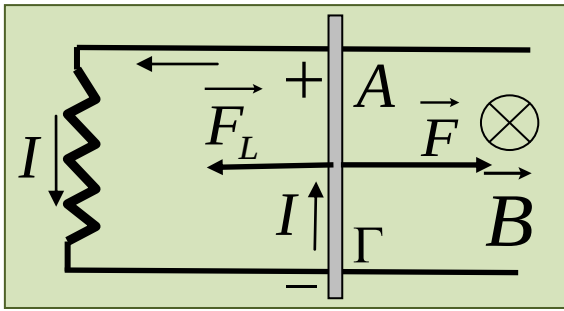
Ποια είναι η «θερμική ισχύς»;

$$P_\theta = I^2 \cdot (R + R_\rho) = \frac{E_{\varepsilon\pi}^2}{(R + R_\rho)^2} \cdot (R + R_\rho) = \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v^2}{R + R_\rho}$$



Δηλαδή ταυτίζονται. Τελικά το έργο της μετατρέπεται σε θερμικές απώλειες.

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας.



Σύμφωνα με το Θ.Μ.Κ.Ε:

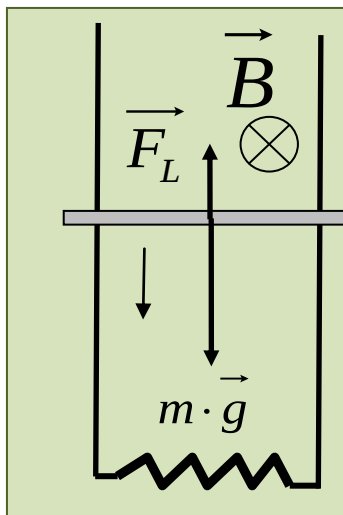
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{(F - F_L) \cdot dx}{dt} = (F - F_L) \cdot v$$

Η δύναμη προσφέρει έργο με ρυθμό $F \cdot v$

Η δύναμη Laplace με ρυθμό $-F_L \cdot v$

Προφανώς όταν εξισώνονται οι δύο δυνάμεις και σταθεροποιείται η ταχύτητα στην οριακή της τιμή οι δύο ρυθμοί είναι αντίθετοι. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται. Λογικό διότι σταθεροποιείται.

Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας.



Όσο πέφτει η ράβδος μειώνεται η δυναμική της ενέργεια.

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{m \cdot g \cdot dh}{dt} = -m \cdot g \cdot v$$

Η διατήρηση ενέργειας επιβάλλει:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} + P_{απ} = 0$$

Με απλά λόγια η μηχανική ενέργεια που χάνεται σε χρόνο dt γίνεται θερμικές απώλειες στον ίδιο χρόνο.

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$-m \cdot g \cdot v + (m \cdot g - F_L) \cdot v + F_L \cdot v = 0$$

Η ισότητα είναι αυτονόητη.

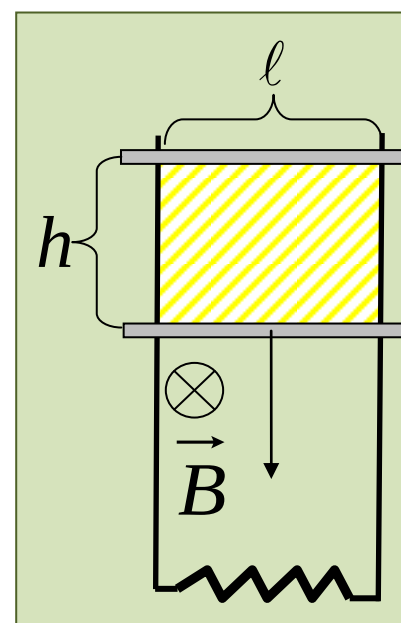
Διατήρηση ενέργειας.

Σου λένε ότι ο αγωγός έχει αποκτήσει ήδη την οριακή του ταχύτητα και ότι έχει πέσει κατά h . Πόση θερμότητα έχει ελευθερωθεί;

Δεν τη βρίσκεις εύκολα από τον νόμο Joule διότι το ρεύμα δεν είναι σταθερό.

Σκέψου όμως ότι η δυναμική ενέργεια έγινε κινητική και θερμική.

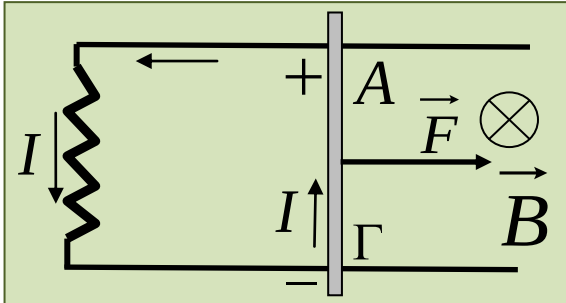
$$\text{Ήτοι: } m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_{op}^2 + W_{\theta}$$



Η οριακή ταχύτητα είναι $v_{op} = m \cdot g \cdot \frac{R + R_\rho}{B^2 \cdot \ell^2}$

Ο υπολογισμός έγινε προηγουμένως όταν απαιτήσαμε μηδενισμό της συνισταμένης.

Υπολογίζουμε εύκολα τις θερμικές απώλειες.



Στην «οριζόντια» περίπτωση κάνουμε σχεδόν τα ίδια.

Το έργο της δύναμης γίνεται κινητική και θερμότητα:

$$F \cdot x = \frac{1}{2} m \cdot v_{op}^2 + W_\theta$$

Αν τώρα μας ζητήσουν όχι την συνολικώς παραχθείσα θερμότητα αλλά αυτήν στη ράβδο;

Ράβδος και αντίσταση διαρρέονται από ίδιο ρεύμα συνεχώς. Ο λόγος των θερμότητων που παράγονται σε χρόνο dt είναι:

$$\frac{dW_{\theta\rho}}{dW_{\theta\alpha}} = \frac{I^2 \cdot R_\rho}{I^2 \cdot R} = \frac{R_\rho}{R} \Rightarrow dW_{\theta\rho} = dW_{\theta\alpha} \cdot \frac{R_\rho}{R}$$

Αθροίζοντας έχουμε ότι:

$$W_{\theta\rho} = W_{\theta\alpha} \cdot \frac{R_\rho}{R}$$

Φυσικά τα παραπάνω δεν εξαντλούν το θέμα. Ασκήσεις ποικίλες θα εμπλουτίσουν την ραβδολογία. Ασκήσεις ων ουκ έστι αριθμός.