

ΚΕΦ. 1^ο - ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

1. Η **κυκλική συχνότητα** ω εκφράζει το ρυθμό αύξησης της φάσης $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ και εξαρτάται μόνο από τη μάζα m και τη σταθερά επαναφοράς D .
2. Δεν μελετάμε μια α.α.τ. αν δεν έχουμε προσδιορίσει, τη θέση ισορροπίας (όπου $\Sigma F = F_{\text{επ}} = 0$) και τη θετική φορά, συνήθως την αρχική κατεύθυνση απομάκρυνσης του σώματος, που αντιστοιχεί στη μικρότερη ϕ_0 .
3. Η συχνότητα διέλευσης του σώματος από τη Θ.Ι. είναι διπλάσια από τη συχνότητα ταλάντωσης.
4. Η **απομάκρυνση** x είναι η συντεταγμένη του σώματος πάνω σε άξονα πραγματικών αριθμών, όπου το « 0 » αντιστοιχεί στη Θ.Ι. και τα σημεία «+A» και «-A» στις δύο ακραίες θέσεις.
5. Η **μετατόπιση** Δx του σώματος μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 είναι $\Delta x = x_2 - x_1$. Η μετατόπιση σε μία περίοδο είναι μηδέν.
6. Η **απόσταση** d του σώματος από τη θέση ισορροπίας ισούται με την απόλυτη τιμή $|x|$ της απομάκρυνσης.
7. Το συνολικό **διάστημα** που διέτρεξε το σώμα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών, είναι συνήθως διαφορετικό από τη μετατόπιση. Βρίσκουμε τη φάση και τη μετατόπιση στις δύο χρονικές στιγμές και κατασκευάζουμε κάποιο βοηθητικό διάγραμμα απ' όπου υπολογίζεται το συνολικό διάστημα. Θυμόμαστε ότι σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα διατρέχει διάστημα «4A».
8. Η **αρχική φάση** ϕ_0 δίνει πληροφορίες για τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την οποία αρχίσαμε να μελετάμε την ταλάντωση. Υπολογίζεται από τις εξισώσεις: $\eta\mu\phi_0 = x(0)/A$ ή **συν $\phi_0 = u(0)/\omega A$** και πάντα ισχύει ότι $0 \leq \phi_0 < 2\pi$
9. Το **πρόσημο της απομάκρυνσης** ταυτίζεται με το πρόσημο του ημιτόνου. Το **πρόσημο της ταχύτητας** ταυτίζεται με το πρόσημο του συνημιτόνου. Η επιτάχυνση έχει κάθε στιγμή πρόσημο αντίθετο της απομάκρυνσης, αφού $a = -\omega^2 x$.
10. Η ταχύτητα προηγείται φασικά της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$ rad και η επιτάχυνση προηγείται φασικά της ταχύτητας πάλι κατά $\pi/2$ rad.
11. Κάθε α.α.τ. χωρίζεται σε τέσσερα χρονικά διαστήματα ίσα με $T/4$.
 1^ο: $x = \{0, +A\}$ όπου $x > 0$, $u > 0$ και $a < 0$, επιβραδυνόμενη
 2^ο: $x = \{+A, 0\}$ όπου $x > 0$, $u < 0$ και $a < 0$, επιταχυνόμενη
 3^ο: $x = \{0, -A\}$ όπου $x < 0$, $u < 0$ και $a > 0$, επιβραδυνόμενη
 4^ο: $x = \{-A, 0\}$ όπου $x < 0$, $u > 0$ και $a > 0$, επιταχυνόμενη
12. Όταν θέλουμε να βρούμε ποιά χρονική στιγμή συμβαίνει κάτι για 1^η, 2^η .. φορά, θα πρέπει να ξέρουμε ότι η 1^η φορά είναι η 1^η (μικρότερη) θετική τιμή του χρόνου που βρίσκουμε λύνοντας την κατάλληλη τριγωνομετρική εξίσωση. Προσοχή στο πρόσημο της ταχύτητας τη στιγμή που μας ενδιαφέρει, διότι μπορεί να καθορίζει άλλη λύση.
13. Από δοσμένες γραφικές παραστάσεις βρίσκουμε το πρόσημο άλλων μεγεθών που δεν είναι εμφανή.
14. Από τις γραφικές παραστάσεις, περιοδικά μεταβαλλόμενων μεγεθών συναρτήσει του χρόνου στο ίδιο διάγραμμα, βγάζουμε τρία συμπεράσματα. α) Διαβάζουμε τις μέγιστες τιμές των μεγεθών που παριστάνονται. β) Συγκρίνουμε τις περιόδους. γ) Από τις τιμές των μεγεθών τη στιγμή $t = 0$ καταλήγουμε στην αρχική φάση.
15. Για την ίδια απομάκρυνση έχουμε δύο αντίθετες ταχύτητες και για την ίδια ταχύτητα έχουμε δύο αντίθετες επιταχύνσεις.
16. Η **σταθερά επαναφοράς** γενικά **δεν** εξαρτάται από τη μάζα m και την κυκλική συχνότητα ω , παρά την ύπαρξη της σχέσης $D = m\omega^2$. Εξαρτάται μόνο από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος. Ειδικά για ταλάντωση με ελατήριο είναι $D = k = \text{σταθ.}$
17. Η **δύναμη επαναφοράς** είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα και το αναγκάζουν να εκτελέσει α.α.τ. Είναι δε συντηρητική δύναμη, διότι σε μια περίοδο το έργο της είναι μηδέν. Για να έχει η σχέση $F_{\text{επ}} = -Dx$ αρνητικό πρόσημο πρέπει να επιλέγουμε θετική απομάκρυνση.
18. Το **έργο της δύναμης επαναφοράς**, εκτός της σχέσης $W_{F_{\text{επ}}} = U_{T, \text{αρχ}} - U_{T, \text{τελ}}$ υπολογίζεται και από το γνωστό Θ.Μ.Κ.Ε. $W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2}mv_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{αρχ}}^2$. Μέσω του έργου της μετατρέπεται την κινητική σε δυναμική ενέργεια και αντίστροφα.
19. Η $F_{\text{επ}}$ είναι **συντηρητική**. Από τη σχέση $W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}Dx_2^2$ είναι φανερό ότι σε κλειστή διαδρομή, όπου $x_1 = x_2$, θα έχω $W_{F_{\text{επ}}} = 0$.

20. Η **μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης** E_T είναι η ενέργεια που προσφέρουμε στο σώμα ώστε να εκτελέσει την ταλάντωση. Δεν εξαρτάται από άλλο μέγεθος, αλλά καθορίζει την τιμή του πλάτους A σε ένα συγκεκριμένο ταλαντούμενο σώμα. Ισχύει ότι $E_T \leq E_{\text{μηχαν, συστήματος}}$
21. Η **Α.Δ.Ε.Ταλάντωσης** γράφεται $E_T = K + U = U_{\text{max}} = K_{\text{max}}$ ή με αντικατάσταση των ενεργειών
- $$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$
- και μας υπολογίζει οποιοδήποτε από τα μεγέθη x, u, A, u_0, ω αν γνωρίζουμε τα υπόλοιπα. Προσοχή όταν γράφεται για κάθε σώμα συστήματος χωριστά πρέπει να χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη σταθερά και μάζα του συστήματος.
22. Η ισχύς της δύναμης επαναφοράς $P_{F_{\text{επ}}} = F_{\text{επ}} \cdot u = -Dxu$, εκφράζει το ρυθμό μετατροπής της δυναμικής ενέργειας σε κινητική. Αν $P_{F_{\text{επ}}} > 0$ η κινητική ενέργεια αυξάνεται.
23. **Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης** είναι η ταχύτητα, $dx/dt = u$
Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση, $du/dt = a$
 Ο ρυθμός μεταβολής της επιτάχυνσης δεν έχει φυσικό νόημα, αλλά ισούται με $da/dt = -\omega^2 u$
Ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η δύναμη επαναφοράς.
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι η ισχύς της $F_{\text{επ}}$, $dK/dt = F_{\text{επ}} \cdot u$
Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι ο αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας. $dU/dt = -dK/dt$ αφού πρέπει να είναι συνεχώς $K + U = \text{σταθερό}$.
 Φυσικά $dE_T/dt = 0$.
24. Τα διανυσματικά μεγέθη u, a και $F_{\text{επ}}$ αντιμετωπίζονται ως αλγεβρικά και το πρόσημό τους δηλώνει τη φορά τους.
25. Για να σχεδιάσουμε **γραφικές παραστάσεις** x, u, a, F, K, U σε συνάρτηση με το χρόνο, βρίσκουμε πρώτα τις τιμές των μεγεθών αυτών τη χρονική στιγμή $t = 0$.
 Οι $a - x$ και $F_{\text{επ}} - x$ είναι ευθείες με αρνητική κλίση. Ενώ οι $U - x$ και $K - x$ είναι παραβολές.
26. Η **περίοδος της ενέργειας** είναι η μισή της περιόδου της α.α.τ.
 Η συχνότητα εξίσωσης δυναμικής και κινητικής ενέργειας είναι τετραπλάσια της συχνότητας ταλάντωσης, αφού έχουμε $K = U$, 4 φορές σε μία περίοδο.
27. Αν θέλουμε τη θέση όπου $U = \lambda K$, λύνουμε την $(\lambda+1)U = U_{\text{max}}$ ως προς x .
 Αν θέλουμε την ταχύτητα όταν $U = \lambda K$, λύνουμε την $(\lambda+1)K = K_{\text{max}}$ ως προς u .
28. Όταν δίνεται κάποια αριθμητική εξίσωση ενός μεγέθους της ταλάντωσης σε συνάρτηση με κάποιο άλλο μέγεθος, προσπαθούμε να βρούμε τη γενική (εγγράμματη) σχέση που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη, ώστε να βγάλουμε πληροφορίες για τα άλλα μεγέθη. Π.χ. αν $K = 20 - 80x^2$ (S.I.), βρίσκω την $K = E - \frac{1}{2}Dx^2$ (Α.Δ.Ε.Τ.) απ' όπου αρχικά υπολογίζω ότι $E = 20\text{J}$ και $D = 80\text{N/m}$ και κατόπιν – επειδή $E = \frac{1}{2}DA^2$ (S.I.) – υπολογίζω το $A = \sqrt{\frac{2E}{D}} = 0,5\text{m}$
29. Έστω ότι ζητούμε για πόσο χρονικό διάστημα η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης θα είναι μεγαλύτερη από το 1/3 της κινητικής ενέργειας. Δίνεται ότι $\omega = 4\text{rad/s}$. Πρέπει $U > K/3 \Rightarrow 4U > U_{\text{max}} \Rightarrow x^2 > A^2/4 \Rightarrow |x| > A/2 \Rightarrow |\eta\mu(\omega t + \phi_0)| > 1/2$. Φτιάχνουμε τον κύκλο του σχήματος που απεικονίζει τα δεδομένα του προβλήματος (λέγεται και κύκλος αναφοράς). Είναι φανερό ότι πρέπει η φάση να κυμαίνεται μεταξύ $\pi/6 < \phi < 5\pi/6$ και $7\pi/6 < \phi < 11\pi/6$. Αλλά οι μεταβολές της φάσης $\Delta\phi$ είναι ανάλογες του χρόνου Δt που έγιναν. Οπότε $\omega = \Delta\phi_{\text{ολ}}/\Delta t_{\text{ολ}} \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \Delta\phi_{\text{ολ}}/\omega \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = (4\pi/3)/4\text{s} = \pi/3\text{s}$
30. Κάθε ελατήριο έχει δύο χαρακτηριστικά. Το φυσικό μήκος όταν δεν ασκείται πάνω του καμία δύναμη και τη σταθερά ελαστικότητας $k = F_{\text{ελ}}/\Delta\ell = D$, ανάλογη της σκληρότητάς του. Η $F_{\text{ελ}}$ ασκείται και στα δύο άκρα του ελατηρίου και είναι συντηρητική δύναμη.
31. Η **δυναμική ενέργεια ελατηρίου** παραμορφωμένου κατά $\Delta\ell$ δίνεται από τη σχέση $U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta\ell^2$, και είναι διαφορετική από την $U_{\text{ταλάντωσης}}$ ή την $U_{\text{βαρυτ.}}$ ή το άθροισμά τους.
32. Το **έργο της δύναμης ελατηρίου** δίνεται από τη σχέση $W_{F_{\text{ελ}}} = U_{\text{ελ, αρχ}} - U_{\text{ελ, τελ}}$
33. Όταν μελετάμε ένα πρόβλημα που έχει ελατήριο (κατακόρυφο ή πλάγιο) με σώμα που ταλαντώνεται, πρέπει πάντα να σημειώνουμε τη θέση φυσικού μήκους και να προσδιορίζουμε την αρχική του παραμόρφωση $\Delta\ell_0$ από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης, στην οποία $\Sigma F = 0$. Κατά δε την ταλάντωση η απομάκρυνση x θα συνδέεται με την παραμόρφωση $\Delta\ell$ του ελατηρίου με τη σχέση $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$. Σε οριζόντια ταλάντωση θα είναι $\Delta\ell = x$.
34. Στις οριζόντιες ταλαντώσεις με ελατήριο η αλλαγή μάζας του ταλαντούμενου σώματος δεν επηρεάζει τη Θ.Ι. Στις πλάγιες και κατακόρυφες ταλαντώσεις με ελατήριο η αλλαγή της μάζας του ταλαντούμενου σώματος αλλάζει τη Θ.Ι., προς τα κάτω αν αυξάνεται η μάζα ή προς τα πάνω αν ελαττώνεται η μάζα.

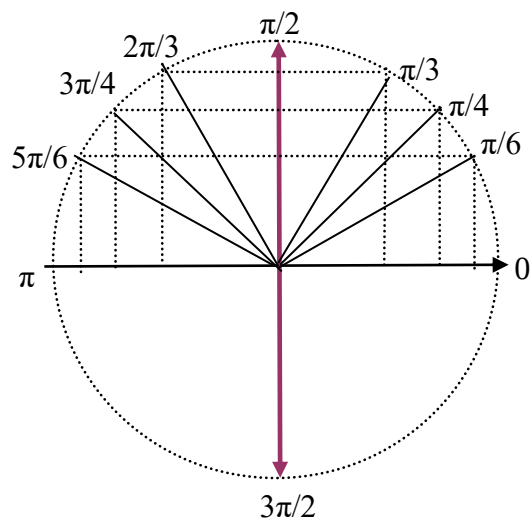
35. Όταν σε οριζόντιες ταλαντώσεις σώματος με ελατήριο υπάρχουν και άλλες οριζόντιες δυνάμεις, η Θ.Ι. δεν συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου.
36. Όταν δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται **σε επαφή** εκτελούν κοινή α.α.τ. έχουν: **α) ίδια** $T, f, \omega, A, \chi, u, a$, αλλά **β) διαφορετική** σταθερά $D_1 = m_1 \omega^2$ και $D_2 = m_2 \omega^2$ για το κάθε σώμα {προφανώς $D_1 + D_2 = D = (m_1 + m_2) \omega^2$ } και συνεπώς διαφορετικά $K, U, E_T, P, F_{επ}$. Η επαφή τους χάνεται, όταν η δύναμη επαφής $N = 0$, για κάποια οριακή $f_{\max}$ ή $A_{\max}$. Για τον υπολογισμό της N ή των $f_{\max}$ και $A_{\max}$ χρησιμοποιούμε τις $F_{επ,1} = -D_1 \chi$ και $F_{επ,2} = -D_2 \chi$.
37. Στην περίπτωση κρούσης δύο σωμάτων ισχύει η Α.Δ.Ο: $\vec{p}_1^{\alphaρχ} + \vec{p}_2^{\alphaρχ} = \vec{p}_1^{\tauελ} + \vec{p}_2^{\tauελ}$, όπου $\vec{p} = m\vec{v}$. Θα την εφαρμόσουμε αφού ορίσουμε μια θετική φορά. Ισχύει και $\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$.
38. **α) Σε πλαστική κρούση** (δημιουργία συσσωματώματος ή διάσπαση) που γίνεται σε λείο **οριζόντιο** επίπεδο, η αλλαγή της μάζας προκαλεί **αλλαγή μόνο στην περίοδο** της ταλάντωσης και όχι στη Θ.Ι. **β) Αν** η ταλάντωση όμως μετά την πλαστική κρούση γίνεται **κατακόρυφα ή πλάγια**, εκτός από τη **μεταβολή της περιόδου, θα έχουμε αλλαγή στη Θ.Ι.** της ταλάντωσης, πιθανόν και στην αρχική φάση. **γ) Σε** κάθε περίπτωση εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας δύο φορές, μία για την αρχική και μία για την τελική Θ.Ι. γράφοντας για κάθε μια τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F = 0$.
39. Σε κάθε **διάσπαση** έχουμε αύξηση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος λόγω της ενέργειας που προσφέρει ο μηχανισμός διάσπασης.
40. Όταν θέλουμε την τιμή μιας από τις δυνάμεις που ενεργούν σε ένα ταλαντούμενο σώμα ή να γράψουμε την εξίσωσή της σε συνάρτηση με την απομάκρυνση ή το χρόνο, θεωρούμε πάντα μία τυχαία θέση κατά τη θετική φορά της ταλάντωσης και εφαρμόζουμε για το σώμα το θεμελιώδη νόμο διανυσματικά. Έστω ότι στο ταλαντούμενο σώμα ασκούνται μία δύναμη F , το βάρος W , η δύναμη το ελατηρίου $F_{ελ}$ και ζητούμε την $F_{ελ}(\chi)$. Σε κάθε θέση χ ισχύει $\vec{F}_{επ} = \vec{F} + \vec{W} + \vec{F}_{ελ}$. Η $\vec{F}$ και η $\vec{W}$ αντικαθιστούνται με το μέτρο τους και πρόσημο ανάλογα με τη θετική φορά που ορίσαμε. Η $\vec{F}_{επ}$ αντικαθιστάται πάντα με $-m\omega^2 \chi$. Η δε $\vec{F}_{ελ}$ αντικαθιστάται πάντα με $+F_{ελ}$ και το πρόσημο της προκύπτει από τη σχέση $F_{ελ}(\chi)$.
41. Η **πλαστική κρούση αλλάζει την ταχύτητα** του ταλαντούμενου σώματος, που υπολογίζεται με την Α.Δ.Ο. και το **πλάτος** ταλάντωσης, που υπολογίζεται από την Α.Δ.Ε.Τ. η οποία γράφεται $\frac{1}{2} D d^2 + \frac{1}{2} (M + m) V^2 = \frac{1}{2} D A^2$.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- 1) $\eta\mu^2 \phi + \sigma\upsilon\nu^2 \phi = 1$
 2) $\eta\mu(\phi + \pi/2) = \sigma\upsilon\nu\phi$ $\eta\mu(\phi + \pi) = -\eta\mu\phi$
 $\sigma\upsilon\nu(\phi + \pi/2) = -\eta\mu\phi$ $\sigma\upsilon\nu(\phi + \pi) = -\sigma\upsilon\nu\phi$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\eta\mu$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\sigma\upsilon\nu$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0
$\epsilon\phi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$

$$\begin{aligned} \eta\mu(\pi - \phi) &= \eta\mu\phi & \eta\mu(2\pi - \phi) &= \eta\mu(-\phi) = -\eta\mu\phi \\ \sigma\upsilon\nu(\pi - \phi) &= -\sigma\upsilon\nu\phi & \sigma\upsilon\nu(2\pi - \phi) &= \sigma\upsilon\nu(-\phi) = \sigma\upsilon\nu\phi \end{aligned}$$



$$3) \eta\mu\phi = \eta\mu\theta \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \phi = 2k\pi + \theta \\ \phi = (2k+1)\pi - \theta \end{array} \right\rangle \quad 4) \sigma\upsilon\nu\phi = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \phi = 2k\pi \pm \theta$$