

Το Πρόβλημα

Αν

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

Να υπολογιστεί το

$$x = x_1 + x_2$$

Η Λύση

Μέθοδος 1^η

Προκειμένου να ανάγουμε το πρόβλημα στην γνωστή από το βιβλίο εξίσωση κάνουμε τον μετασχηματισμό :

$$\omega t + \varphi_1 = \omega t' \quad (3)$$

(με απλά λόγια θέτουμε $\omega t + \varphi_1 = \omega t'$)

ή

$$\omega t = \omega t' - \varphi_1 \quad (4)$$

Η σχέση (1) με βάση της (3) γίνεται

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1)$$

ή

$$x_1 = A_1 \eta\mu \omega t'$$

Ενώ η σχέση (2) με βάση την (4) γίνεται

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2),$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' - \varphi_1 + \varphi_2),$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' + \varphi_2 - \varphi_1)$$

αν θέσουμε

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

τότε

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' + \varphi)$$

Το αρχικό πρόβλημα κάνοντας τον μετασχηματισμό $\omega t + \varphi_1 = \omega t'$ είναι ισοδύναμο με

$$x_1 = A_1 \eta\mu \omega t',$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t' + \varphi)$$

Η λύση του οποίου με βάση την θεωρία του βιβλίου είναι

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sin \varphi}$$

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A_1 + A_2 \sin \varphi}$$

$$x = A \eta\mu(\omega t' + \theta)$$

και επειδή $\omega t' = \omega t + \varphi_1$ (3) έχουμε τελικά

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta)$$

Παρατηρήσεις

1. Λίγα λόγια για την εξίσωση $\varepsilon\varphi \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi}$.

Ένας μαθηματικός αν αντιμετώπιζε το πρόβλημα δεν θα έδινε ποτέ την παραπάνω εξίσωση για τον προσδιορισμό της γωνίας θ και αυτό γιατί από την παραπάνω εξίσωση ΔΕΝ προσδιορίζεται μονότιμα η γωνία αλλά θα έδινε τον παρακάτω συνδυασμό τριγωνομετρικών αριθμών

$$\eta\mu \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A}, \quad \sigma\upsilon\nu \theta = \frac{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi}{A}$$

το πηλίκο βέβαια των δύο παραπάνω δίνει την $\varepsilon\varphi \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi}$ αλλά η γνώση των δύο τριγωνομετρικών αριθμών περιέχει περισσότερη πληροφορία από ότι το πηλίκο τους.

Έχοντας τα $\eta\mu \theta$ και $\sigma\upsilon\nu \theta$ μπορούμε να υπολογίσουμε το τεταρτημόριο της γωνίας.

πχ.

Ας υποθέσουμε πως έχουμε να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα

$$x_1 = \eta\mu \omega t \text{ (SI)},$$

$$x_2 = \sqrt{3} \eta\mu \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ (SI)}$$

τότε

$$A = \sqrt{1 + 3 + 2\sqrt{3} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2}} = 2 \text{ m}$$

και

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi} = \frac{\sqrt{3} \eta\mu \frac{3\pi}{2}}{1 + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{+1}$$

η παραπάνω εξίσωση $\varepsilon\varphi \theta = -\sqrt{3}$ έχει δύο λύσεις (στο διάστημα $-\pi < \theta \leq \pi$).

$$\theta = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3}$$

Το ερώτημα που γεννάται είναι ποια από τις δύο λύσεις κρατάμε;

Αν όμως υπολογίζαμε τις τιμές $\eta\mu \theta = \frac{A_2 \eta\mu \varphi}{A}$, $\sigma\upsilon\nu \theta = \frac{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi}{A}$ τότε θα είχαμε

$$\eta\mu \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu \theta = \frac{1}{2}$$

Η γωνία που ικανοποιεί και τις δύο παραπάνω εξισώσεις είναι $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Τελικά κάνουν λάθος οι Φυσικοί που υπολογίζουν την $\varepsilon\varphi \theta$;

Η απάντηση είναι όχι και αυτό γιατί το μόνο που μας χρειάζεται ακόμη για τον προσδιορισμό της γωνίας θ είναι να υπολογίσουμε το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται. Για να επιλέξουμε ποια από τις δύο γωνίες θα κρατήσουμε θα λάβουμε υπόψιν το πρόσημο του αριθμητή και το πρόσημο του παρονομαστή.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε καταλήξει πως

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{-\sqrt{3}}{+1}$$

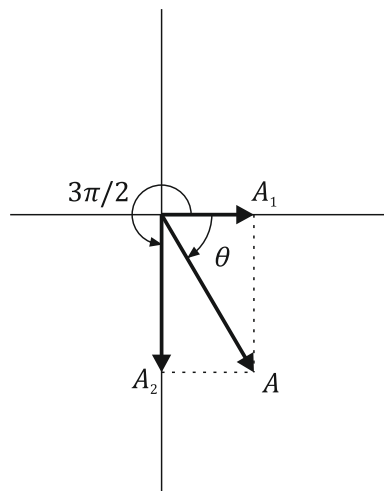
Το πρόσημο του αριθμητή αντιπροσωπεύει το πρόσημο του ημ θ και το πρόσημο του παρονομαστή αντιπροσωπεύει το συν θ δηλαδή η γωνία θ θα πρέπει να έχει αρνητικό ημίτονο και θετικό συνημίτονο άρα είναι $\eta\theta = -\frac{\pi}{3}$ (4^ο τεταρτημόριο) και όχι $\eta\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ (2^ο τεταρτημόριο).

Στο κόσμο της πληροφορικής η συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την γωνία θ είναι η

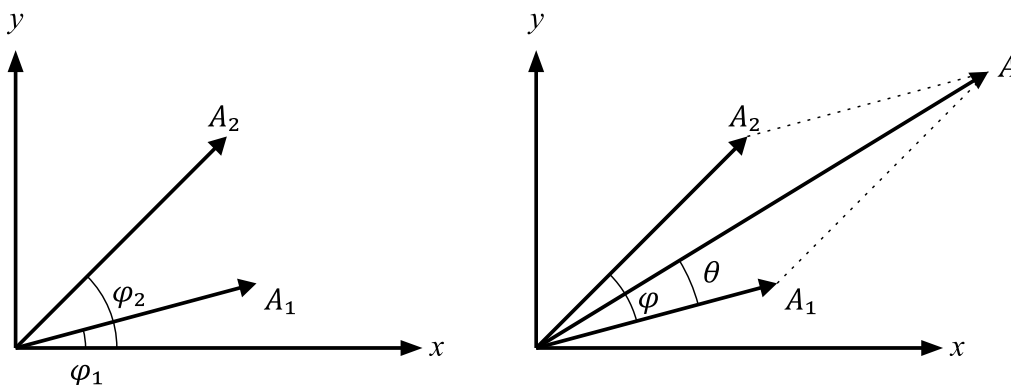
$$\theta = \text{Math.atan2}(y, x)$$

Σχηματικά

Η φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι $\frac{3\pi}{2}$ και η ταλάντωση αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα $\vec{A}_2$ ενώ η πρώτη ταλάντωση με αρχική φάση 0 παριστάνεται με το διάνυσμα $\vec{A}_1$. Η συνισταμένη ταλάντωση παριστάνεται με το διάνυσμα $\vec{A}$ από το σχήμα φαίνεται πως η συνισταμένη ταλάντωση έχει $\theta = -\frac{\pi}{3}$ και όχι $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$.

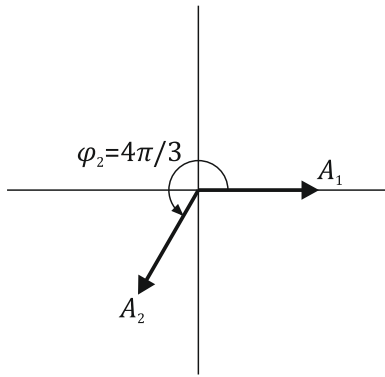


2. Λόγου του ότι η σύνθεση ταλαντώσεων ανάγεται στην συνισταμένη διανυσμάτων πολλές φορές έχουμε στο βάθος του μυαλού μας το εξής σχήμα : ένα παραλληλόγραμμο με την γωνία των δύο διανυσμάτων να είναι $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ και η διαγώνιος (συνισταμένη) να σχηματίζει γωνία θ με την «πρώτη – κάτω πλευρά» (βλέπε σχήμα).

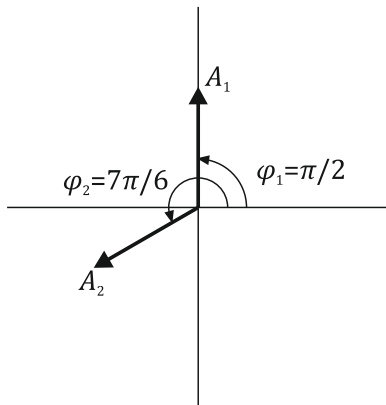


Βλέποντας το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε πως $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ και θ ανάμεσα στις φ_1 και φ_2 . Τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όσο φαίνονται στο παραπάνω σχήμα και αυτό γιατί οι γωνίες φ_1 και φ_2 μπορεί να είναι οποιεσδήποτε. Μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές. Επίσης η διαφορά $\varphi_2 - \varphi_1$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από (180°) ή και αρνητική δηλαδή δεν είναι σίγουρο ότι αποτελεί γωνία δύο διανυσμάτων (σε αυτήν την περίπτωση η γωνία θ δεν θα είναι ανάμεσα στις φ_1 και φ_2). Για να λύσουμε το πρόβλημα έχοντας στο μυαλό μας το παραλληλόγραμμο αρχίζουμε και διακρίνουμε περιπτώσεις περιπτώσεων και φτιάχνουμε πίνακες που είναι αδύνατον να αποστηθιστούν ενώ τα πράγματα είναι απλά αν εφαρμόσουμε σωστά τα μαθηματικά.

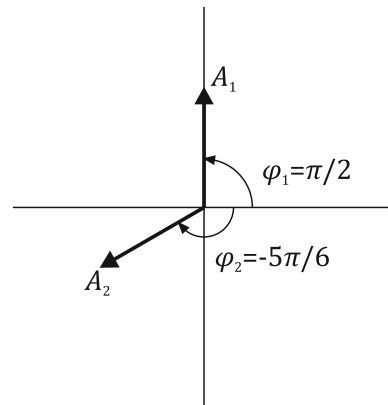
Ακολουθούν μερικές περιπτώσεις που μας προβληματίζει για το ποια είναι η γωνία $\varphi_2 - \varphi_1$ όταν προσπαθήσουμε να το δούμε γωνία δύο διανυσμάτων.



Αν και η διαφορά $\varphi_2 - \varphi_1$ είναι θετική δεν είναι όμως μικρότερη από 180° οπότε δεν αντιπροσωπεύει γωνία δύο διανυσμάτων και η γωνία θ δεν είναι «μεταξύ» των δύο γωνιών.



Η διαφορά $\varphi_2 - \varphi_1$ είναι θετική και μικρότερη από 180° οπότε αντιπροσωπεύει γωνία δύο διανυσμάτων μπορούμε να πούμε ότι η θ είναι «μεταξύ» των δύο γωνιών.



Ουσιαστικά είναι το ίδιο πρόβλημα με το προηγούμενο, όμως ποια γωνία είναι μεγαλύτερη;

Μέθοδος 2^η

Επειδή όπως είπαμε η σύνθεση ταλαντώσεων είναι ουσιαστικά συνισταμένη διανυσμάτων θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1) + A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

αναλύοντας σε συνιστώσες

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} = A_1 \sigma\upsilon\nu \varphi_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi_2$$

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} = A_1 \eta\mu \varphi_1 + A_2 \eta\mu \varphi_2$$

απ όπου

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

και

$$\epsilon\varphi \alpha = \frac{A_1 \eta\mu \varphi_1 + A_2 \eta\mu \varphi_2}{A_1 \sigma\upsilon\nu \varphi_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu \varphi_2}$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$x = A \eta\mu(\omega t + \alpha)$$

Ερώτηση: Ποια μορφή παίρνουν οι δύο εξισώσεις αν $\varphi_1 = 0$ και $\varphi_2 = \varphi$;

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί το άθροισμα $x = x_1 + x_2$ στις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $x_1 = A \eta\mu \omega t$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t + \frac{4\pi}{3})$.
2. Αν $x_1 = A \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t + \frac{7\pi}{6})$.
3. Αν $x_1 = A \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{6})$.
4. Αν $x_1 = A \eta\mu(\omega t - \frac{5\pi}{6})$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$.
5. Αν $x_1 = A \eta\mu(\omega t + \pi)$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t + \frac{2\pi}{3})$.
6. Αν $x_1 = A \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6})$ και $x_2 = A \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2})$.

Λύσεις

1.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \frac{4\pi}{3}} = A$$

και

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \cos \varphi} = \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{3}}{1 + \cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{+1/2}$$

(Επειδή το πρόσημο του αριθμητή είναι αρνητικό ($\eta\mu \theta < 0$) και το πρόσημο του παρονομαστή είναι θετικό ($\cos \theta > 0$) καταλαβαίνουμε πως η γωνία θ βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο.)

$$\varepsilon\varphi \theta = -\sqrt{3}$$

άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ όμως επειδή το ($\eta\mu \theta < 0$ και $\cos \theta > 0$) η γωνία βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

2.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}} = A$$

και

$$\epsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \sigma\upsilon\nu \varphi} = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3}}{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}} = \frac{+\sqrt{3}/2}{+1/2} = \sqrt{3}$$

άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$ όμως επειδή το $(\eta\mu \theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu \theta > 0)$ η γωνία βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

3.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = A$$

και

$$\epsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \sigma\upsilon\nu \varphi} = \frac{\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{-\sqrt{3}/2}{+1/2} = -\sqrt{3}$$

άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ όμως επειδή το $(\eta\mu \theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu \theta > 0)$ η γωνία βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

4.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = -\frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \frac{4\pi}{3}} = A$$

και

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \cos \varphi} = \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{3}}{1 + \cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{+1/2} = -\sqrt{3}$$

άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ όμως επειδή το ($\eta\mu \theta < 0$ και $\cos \theta > 0$) η γωνία βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A \eta\mu\left(\omega t - \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = A \eta\mu\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right)$$

5.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = A\sqrt{3}$$

και

$$\varepsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \cos \varphi} = \frac{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{+3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

άρα $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$ όμως επειδή το ($\eta\mu \theta < 0$ και $\cos \theta > 0$) η γωνία βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο άρα $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A\sqrt{3} \eta\mu\left(\omega t + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = A\sqrt{3} \eta\mu\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

6.

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

με

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων θα είναι

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

οπότε

$$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3}} = A$$

και

$$\epsilon\varphi \theta = \frac{A \eta\mu \varphi}{A + A \sigma\upsilon\nu \varphi} = \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{3}}{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}/2}{+1/2} = -\sqrt{3}$$

άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ όμως επειδή το ($\eta\mu \theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu \theta > 0$) η γωνία βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο άρα $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Έτσι

$$x = A' \eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = A \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$