

Διανύσματα - Βασικές έννοιες - Πράξεις

Μεθοδολογία χωρίς τη χρήση συντεταγμένων**Κατηγορία 1**

Για να απλοποιήσουμε ένα άθροισμα διανυσμάτων, εκμεταλευόμαστε τις δύο βασικές ιδιότητες $\vec{AB} = -\vec{BA}$ και $\vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AI}$ (το τέλος του πρώτου διανύσματος είναι η αρχή του δεύτερου), και ομαδοποιούμε αναλόγως.

Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\vec{v} = \vec{MI} + \vec{NB} - \vec{MA} - \vec{NI}$

$$\text{Λύση } \vec{v} = \vec{MI} + \vec{NB} - \vec{MA} - \vec{NI} = \vec{MI} + \vec{NB} + \vec{AM} + \vec{IN} = (\vec{AM} + \vec{MI}) + (\vec{IN} + \vec{NB}) = \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{AB}$$

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι για έξι τυχαία σημεία A, B, Γ, Δ, E, Z ισχύει:

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{IZ} = \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{ID}$$

$$\begin{aligned} \text{Λύση: } \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{IZ} &= \vec{AE} + \vec{BZ} + \vec{ID} \text{ τα πηγαίνω όλα στο πρώτο μέλος} \\ \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{IZ} - \vec{AE} - \vec{BZ} - \vec{ID} &= \vec{0} \text{ τα μετατρέπω να έχουν όλα θετικό πρόσημο} \\ \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{IZ} + \vec{EA} + \vec{ZB} + \vec{DI} &= \vec{0} \text{ ομαδοποιώ ώστε το τέλος του ενός να} \\ &\text{είναι η αρχή του άλλου} \\ \Leftrightarrow (\vec{AD} + \vec{DI}) + (\vec{BE} + \vec{EA}) + (\vec{IZ} + \vec{ZB}) &= \vec{0} \text{ αθροίζω μέσα στις παρενθέσεις} \\ \Leftrightarrow \vec{AI} + \vec{BA} + \vec{IB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0} \text{ το οποίο ισχύει.} \end{aligned}$$

Κατηγορία 2

Για να αποδείξουμε μία ισότητα, γράφουμε όλα τα διανύσματα ως διαφορές διανυσματικών ακτίνων με αρχή ένα από τα σημεία της σχέσης που μας δόθηκε ή ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου. Πχ με αρχή το σημείο O θα γράφαμε $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\vec{v} = \vec{MI} + \vec{NB} - \vec{MA} - \vec{NI}$

$$\begin{aligned} \text{Λύση } \vec{v} &= \vec{MI} + \vec{NB} - \vec{MA} - \vec{NI} = (\vec{OI} - \vec{OM}) + (\vec{OB} - \vec{ON}) - (\vec{OA} - \vec{OM}) - (\vec{OI} - \vec{ON}) \\ \text{άρα } \vec{v} &= \vec{OI} - \vec{OM} + \vec{OB} - \vec{ON} - \vec{OA} + \vec{OM} - \vec{OI} + \vec{ON} = \\ &= (\vec{OI} - \vec{OI}) + (\vec{OM} - \vec{OM}) + \vec{OB} - \vec{OA} + (\vec{ON} - \vec{ON}) = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι για έξι τυχαία σημεία A, B, Γ, Δ, E, Z ισχύει:

$$\vec{A\Delta} + \vec{B\epsilon} + \vec{\Gamma Z} = \vec{A\epsilon} + \vec{BZ} + \vec{\Gamma\Delta}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \vec{A\Delta} + \vec{B\epsilon} + \vec{\Gamma Z} &= \vec{A\epsilon} + \vec{BZ} + \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \text{τα μετατρέπω όλα να έχουν αρχή το O} \\ &\Leftrightarrow (\vec{O\Delta} - \vec{O\Lambda}) + (\vec{O\epsilon} - \vec{O\epsilon}) + (\vec{OZ} - \vec{O\Gamma}) = (\vec{O\epsilon} - \vec{O\Lambda}) + (\vec{OZ} - \vec{O\epsilon}) + (\vec{O\Delta} - \vec{O\Gamma}) \\ &\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \text{ αφού τα δύο μέλη είναι ίδια, άρα η σχέση που μας έδωσαν ισχύει.} \end{aligned}$$

Κατηγορία 3

Όταν ζητείται να προσδιορίσουμε ένα σημείο το οποίο ικανοποιεί μια διανυσματική ισότητα, τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα που ορίζεται από το ζητούμενο σημείο, κι ένα άλλο σταθερό σημείο, συναρτήσει γνωστών σταθερών διανυσμάτων (δηλ. που δεν περιέχουν το ζητούμενο σημείο). Γι' αυτό, θεωρούμε ως διανυσματική αρχή, ένα από τα γνωστά σημεία της δοσμένης σχέσης.

Παράδειγμα

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιορίσετε σημείο M στο επίπεδο του τριγώνου τέτοιο ώστε να ισχύει: $2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{Λύση: Θα γράψω όλα τα διανύσματα με αρχή το A. πχ } \vec{MA} &= -\vec{AM}, \vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM}, \vec{M\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AM} \text{ και θα εργαστώ όπως στο παραπάνω παράδειγμα.} \\ 2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{M\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow -2\vec{AM} - \vec{AB} + \vec{AM} + 3\vec{A\Gamma} - 3\vec{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4\vec{AM} - \vec{AB} + 3\vec{A\Gamma} &= \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{AB} + 3\vec{A\Gamma} = 4\vec{AM} \Leftrightarrow -\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + 2\vec{A\Gamma} = 4\vec{AM} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{B\Gamma} + 2\vec{A\Gamma} &= 4\vec{AM} \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{B\Gamma} + 2\vec{A\Gamma}}{4} \end{aligned}$$

Κατηγορία 4

Για να αποδείξουμε ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι παράλληλα, αποδεικνύουμε μια σχέση της μορφής $\vec{a} = k\vec{b}$, όπου $k \in \mathbb{R}$, ή ότι τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα προς ένα τρίτο (μη μηδενικό) διάνυσμα.

Παράδειγμα

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν $\vec{A\Delta} = k\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\epsilon} = \lambda\vec{AB} + k\vec{A\Gamma}$ να δείξετε ότι $\vec{A\epsilon} \parallel \vec{B\Gamma}$ όπου k, λ πραγματικοί αριθμοί.

Κατηγορία 5

Για να αποδείξουμε ότι τρία A, B, Γ είναι συνευθειακά, δείχνουμε ότι δύο από τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{B\Gamma}$ που σχηματίζονται είναι παράλληλα.

Παράδειγμα

Αν για τρία σημεία του επιπέδου A, B, Γ ισχύει $4\vec{OA} - \vec{OB} - 3\vec{O\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Κατηγορία 6

1. Αν γνωρίζουμε τα μέτρα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ τότε:
 αν ισχύει η σχέση $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ τότε $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ (ομόρροπα διανύσματα)
 αν ισχύει η σχέση $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ τότε $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ (αντίρροπα διανύσματα)
2. Αν δίνεται μια διανυσματική ισότητα των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ εκμεταλλευόμαστε τις ισοδυναμίες:
 α. $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}, k > 0$
 β. $\vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}, k < 0$

Παράδειγμα

Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ισχύουν $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = 4|\vec{c}|$ και $|\vec{b}| = 3|\vec{c}|$ τότε να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι αντίρροπα και $\vec{b}, \vec{c}$ ομόρροπα.

Κατηγορία 7

Γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ που μπορεί να γραφεί ως: $\vec{x} = k\vec{a} + \lambda\vec{b}$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Για το γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων πρέπει να θυμόμαστε πάντα τα εξής:

- 1) Αν $k\vec{a} + \lambda\vec{b} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά διανύσματα, τότε υποχρεωτικά $k = \lambda = 0$.
- 2) Αν $k_1\vec{a} + \lambda_1\vec{b} = k_2\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$ και $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά διανύσματα, τότε υποχρεωτικά $k_1 = k_2$ και $\lambda_1 = \lambda_2$.

Παράδειγμα

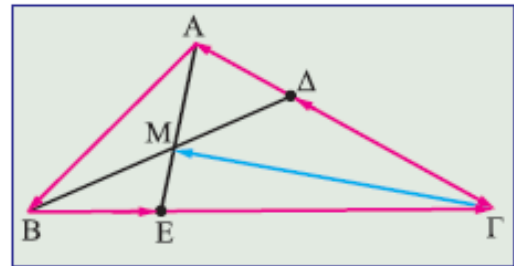
Αν τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{a} + (k - 4)\vec{b}$ και $\vec{w} = 2k\vec{a} - 8\vec{b}$ όπου $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε τα $\vec{v}, \vec{w}$ να είναι παράλληλα.

Κατηγορία 8

Όταν μας ζητήσουν να εκφράσουμε ένα διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό μη συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ τότε προσπαθούμε να γράψουμε το $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{b}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, και μετά εξισώνω τους συντελεστές και λύνω το σύστημα που προκύπτει.

Παράδειγμα

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ , E σημεία στις AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $\vec{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3}\vec{\Gamma A}$ και $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{B\Gamma}$. Αν M είναι το σημείο τομής των $B\Delta$ και AE , να εκφράσετε το $\vec{\Gamma M}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB} = \vec{v}$ και $\vec{AG} = \vec{w}$.



Λύση Το $\vec{\Gamma M}$ αναλύεται με τους παρακάτω τρόπους:

$$\alpha. \vec{\Gamma M} = \vec{\Gamma A} + \vec{AM} = -\vec{w} + x\vec{AE} = -\vec{w} + (\vec{BE} - \vec{BA}) = -\vec{w} + x(\frac{1}{4}\vec{B\Gamma} - \vec{BA}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\Gamma M} = \frac{3x}{4}\vec{v} + \frac{x-4}{4}\vec{w}$$

$$\beta. \vec{\Gamma M} = \vec{BM} - \vec{B\Gamma} = y\vec{B\Delta} - (\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) = y(\vec{BA} + \vec{A\Delta}) - \vec{A\Gamma} + \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\Gamma M} = (1-y)\vec{v} + (\frac{y}{3} - 1)\vec{w}$$

Η ανάλυση σε γραμμικό συνδυασμό είναι μοναδική, άρα οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι, οπότε προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα 2×2 .

$$(\Sigma): \begin{cases} 3\frac{x}{4} = 1 - y \\ \frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 4 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ οπότε } \vec{\Gamma M} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{5}{6}\vec{w}$$

Κατηγορία 9

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται ένα σύνολο από σημεία τα οποία έχουν, και μόνο αυτά, μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Σε ασκήσεις που ζητείται να βρεθεί ένας γεωμετρικός τόπος που ικανοποιεί μία σχέση, προσπαθούμε να μετατρέψουμε τη σχέση με μία ισοδύναμη η οποία έχει στο ένα μέλος διάνυσμα με το σημείο M του γεωμετρικού τόπου και στο άλλο μέλος μία παράσταση χωρίς το σημείο M .

Παράδειγμα

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M για το οποίο ισχύει $\vec{MB} = k\vec{A\Gamma} + (1-k)\vec{AB}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M καθώς το k διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση: $\vec{MB} = k\vec{A\Gamma} + (1-k)\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MB} = k\vec{A\Gamma} + \vec{AB} - k\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MB} - \vec{AB} = k\vec{A\Gamma} - k\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MA} = k(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) \Leftrightarrow \vec{MA} = k\vec{B\Gamma}$ το οποίο σημαίνει ότι καθώς το k διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το M διατρέχει την ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$.