

Διανύσματα - Συντεταγμένες

Μεθοδολογία με τη χρήση συντεταγμένων

Κατηγορία 1

Ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων γίνεται και γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των αντίστοιχων συντεταγμένων τους. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες παραμέτρους, οι οποίες μάζ δίνονται με τα διανύσματα. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και όταν μάζ ζητούν να γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό γνωστών διανυσμάτων.

Παράδειγμα

Δίνεται το $\vec{d} = (k^2 - 4k + 3, k^2 - 3k)$. Να υπολογίσετε το k ώστε να ισχύει: **α)** $\vec{d} = \vec{0}$, **β)** $\vec{d} \neq \vec{0}$ και $\vec{d} \parallel x'x$, **γ)** $\vec{d} \neq \vec{0}$ και $\vec{d} \parallel y'y$.

Λύση

$$\text{α) } \Theta\acute{\epsilon}\lambda\omega \vec{d} = \vec{0} \Leftrightarrow (k^2 - 4k + 3, k^2 - 3k) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4k + 3 = 0 \\ k^2 - 3k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \text{ ή } k = 1 \\ k = 3 \text{ ή } k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 3$$

$$\text{β) } \text{Για να είναι } \vec{d} \neq \vec{0} \text{ πρέπει η μία από τις συντεταγμένες να είναι μη μηδενική, και για να είναι } \vec{d} \parallel x'x \text{ πρέπει η τεταγμένη του } \vec{d} \text{ να είναι μηδέν. Άρα:}$$

$$\begin{cases} k^2 - 4k + 3 \neq 0 \\ k^2 - 3k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 3 \text{ και } k \neq 1 \\ k = 3 \text{ ή } k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Leftrightarrow \vec{d} = (3, 0)$$

$$\text{γ) } \text{Πρέπει η τεταγμένη του } \vec{d} \text{ να είναι μηδέν και η τεταγμένη μη μηδενική. Άρα:}$$

$$\begin{cases} k^2 - 4k + 3 = 0 \\ k^2 - 3k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \text{ ή } k = 1 \\ k \neq 3 \text{ και } k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1 \Leftrightarrow \vec{d} = (0, -2)$$

Κατηγορία 2

Όταν δίνεται παραλληλία διανυσμάτων ή μας ζητούν να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι παράλληλα, χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

- $\vec{d} = k\vec{\beta}$, με $k \in \mathbb{R}$
- $\det(\vec{d} - \vec{\beta}) = 0$
- $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, όπου $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός x , ώστε τα $\vec{a} = (4, x)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι **α)** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, **β)** $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$,

Λύση Θέλω $\lambda_a = \lambda_\beta \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2$

α) Για $x = 2$ παίρνω $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ οπότε είναι ομόρροπα.

β) Για $x = -2$ παίρνω $\vec{a} = (4, -2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$ οπότε είναι αντίρροπα.

Κατηγορία 3

Στις ασκήσεις που αναφέρονται σε συνευθειακά σημεία, παίρνουμε δύο από τα διανύσματα που σχηματίζουν αυτά τα σημεία και χρησιμοποιούμε μία από τις συνθήκες παραλληλίας (π.χ. ότι η αντίστοιχη ορίζουσα είναι μηδέν).

Παράδειγμα

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$, $\vec{OB} = \vec{a} + 4\vec{\beta}$, $\vec{OG} = 4\vec{a} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ, είναι συνευθειακά.

Λύση

Για τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{BG}$ ισχύουν:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{a} + 4\vec{\beta} - 2\vec{a} - 3\vec{\beta} = -\vec{a} + \vec{\beta}$$

$$\text{και } \vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = 4\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{a} - 4\vec{\beta} = 3\vec{a} - 3\vec{\beta} = -3\vec{AB}$$

άρα τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{BG}$ είναι συγγραμμικά με ένα κοινό άκρο, άρα τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.