

Φυλλάδιο 04 - Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός και ιδιότητες

4.1 Αν $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{\beta} = (4, 6)$ και για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\vec{\gamma} = (x, 4 - x)$:

α) να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 26$ να υπολογίσετε το x και το $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

4.2 Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα με $|\vec{a}| = 3, |\vec{\beta}| = 7$, να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

4.3 Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ αντίρροπα διανύσματα με $|\vec{a}| = 9, |\vec{\beta}| = 4$, να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

4.4 Αν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 150^\circ$, να υπολογίσετε το $|\vec{a}|$ και το γινόμενο $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - \vec{\beta})$

4.5 Αν $|\vec{a}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τα:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) $(\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (3\vec{a} + \vec{\beta})$

γ) $(2\vec{a} + \vec{\beta})^2$

Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου

4.6 Να υπολογίσετε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ αν ισχύουν:

α) $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (4, 2)$

β) $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 5)$

γ) $\vec{a} = (0, -3)$ και $\vec{\beta} = (7, -2)$

$\Gamma(-5, 11)$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = -32$:

α) υπολογίστε τον αριθμό x

β) αν M το μέσο της $B\Gamma$ και N το μέσο της AB , να υπολογίσετε το $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GN}$

4.7 Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$, $B(2, -5)$, $\Gamma(-4, 3)$, $\Delta(-1, -2)$, να υπολογίσετε το γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

4.8 Έστω σημεία $A(3, 5)$, $B(x, x - 4)$,

4.9 Αν $\vec{a} = (x, -1)$, $\vec{\beta} = (2, y)$, $\vec{\gamma} = (x - 5, 3)$ με $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 11$, να βρείτε:

α) τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$

β) το $k \in \mathbb{R}$ ώστε $(k\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 38$

Αποδεικτικές ασκήσεις

4.10 Να αποδείξετε την ταυτότητα:
 $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$

4.11 Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$ να δείξετε ότι
 $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{a}|$

4.12 Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$ και $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |4\vec{\beta} - 5\vec{a}|$ να δείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$

4.13 Αν $|\vec{\beta}| = 3|\vec{a}|$ και $|2\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}|$ να δείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

Κάθετα διανύσματα

4.14 Αν $\vec{a} = (k, 3)$, $\vec{\beta} = (-6, k + 2)$ με $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ και $k \in \mathbb{R}$:

α) υπολογίστε το k

β) υπολογίστε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(\vec{a} - \vec{\beta}) \perp (x\vec{a} + \vec{\beta})$

4.15 Αν $\vec{a} = (1, k)$, $\vec{\beta} = (-3, 4 - k)$ με $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (13\vec{a} + 3\vec{\beta})$ και $k \in \mathbb{R}$:

α) υπολογίστε το k

β) βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = 5\vec{a} + 2\vec{\beta}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\delta} = (x, x - 8)$

4.16 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν: $A(-1, 4)$, $B(-2, -1)$, $\Gamma(7, 5)$. Θεωρούμε σημείο M τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{M\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$.

α) υπολογίστε τις συντεταγμένες του M .

β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BI}$

γ) Βρείτε σημείο N του άξονα x'x ώστε $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AB}$.

4.17 Έστω μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$

για τα οποία $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = (\vec{a})^2$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

α) Δείξτε ότι $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$.

β) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{v} \perp \vec{w}$, όπου $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{w} = k\vec{a} - \vec{\beta}$.

$$|k\vec{a} + \lambda\vec{\beta}|$$

4.18 Αν $|\vec{a}| = \sqrt{8}$, $|\vec{\beta}| = 3$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 45^\circ$ να υπολογίσετε το $|3\vec{a} - 2\vec{\beta}|$.

4.19 Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ και $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 4\vec{\beta})$ και $|2\vec{a} + 3\vec{\beta}| = 5$

α) Δείξτε ότι $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

β) Βρείτε το $|3\vec{a} + 8\vec{\beta}|$.

4.20 Αν $|\vec{a}| = 3$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ και για το τρίγωνο ABΓ ισχύουν $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{a} - 4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = 4\vec{a} - 6\vec{\beta}$ και $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{91}$.

α) Δείξτε ότι $|\vec{\beta}| = 5$

β) Ποιο το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ;

$$k\vec{a} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$$

4.21 Αν $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ όπου $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $k = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$.

4.22 Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μοναδιαία διανύσματα και $\vec{a} - 3\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a} = -1$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι αντίθετα.

Γωνία διανυσμάτων

4.23 Να υπολογίσετε τη γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ σε κάθε περίπτωση:

α) $\vec{a} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, -1)$

β) $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -3)$

4.24 Αν $|\vec{a}| = \sqrt{8}$ και $|\vec{\beta}| = 2$ και $(2\vec{a} + 3\vec{\beta}) \perp (5\vec{a} - 7\vec{\beta})$ να βρείτε τη $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$

4.25 Αν $\vec{a} = (k, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, k - 4)$ με $k \in \mathbb{R}$ και $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \sqrt{3} \cdot \vec{\beta}) = 6$, να βρείτε:

α) τον αριθμό k

β) τη γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$

4.26 Αν $|\vec{a}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 5$ και ισχύει $(\vec{a} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{a} + \vec{\beta}) = -46$

α) υπολογίστε το $\sin \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})}$

β) αν $\vec{v} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$

Προβολή διανύσματος

4.27 Αν $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε την προβολή $\vec{\beta}$ (σε συνάρτηση του $\vec{a}$).

4.28 Αν $\vec{a} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (9, 7)$, να βρείτε την προβολή $\vec{\beta}$

4.29 Αν $\vec{a} = (3, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 10)$, να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε συνιστώσες $\vec{v}$ και $\vec{u}$ ώστε

$\vec{v} \parallel \vec{a}$ και $\vec{v} \perp \vec{u}$.

4.30 Σε τρίγωνο ABΓ όπου M το μέσο της ΒΓ, ισχύουν: $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AI}| = 6$ και $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})} = \frac{\pi}{3}$

α) υπολογίστε το $|\overrightarrow{AM}|$

β) Δείξτε ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{AM}} \overrightarrow{AB} = \frac{14}{19} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Ευκλείδεια γεωμετρία

4.31 Έστω $AB\Gamma\Delta$ παρ/μο με $GE \perp AB$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$. Δείξτε ότι $\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{B\Gamma}^2$

4.32 Στις πλευρές AB , $B\Gamma$ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, θεωρώ σημεία Z , E , αντίστοιχα, ώστε $BZ = \Gamma E$. Δείξτε ότι $AE \perp \Delta Z$.

4.33 Αν τα σημεία A , B , Γ , Δ σχηματίζουν τετράπλευρο ώστε $\overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 = \overrightarrow{B\Delta}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

4.34 Σε κύκλο (O, R) με διάμετρο $A\Delta$ και

χορδή $B\Gamma$, φέρω χορδή AA' κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο H . Δείξτε ότι:

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AA'}$

β) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

4.35 Έστω κύκλος (O, R) και M σημείο του επιπέδου. Θεωρώ ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το M και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B . Αν Γ το αντιδιαμετρικό σημείο του A , να δείξετε ότι: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MO}^2 - R^2$

Γεωμετρικοί τόποι

4.36 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}) \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

4.37 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του

επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}^2 = \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM})$$

4.38 Έστω AB ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{BM}^2 = 16 - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Συνδυαστικές ασκήσεις

4.39 Έστω διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $2\vec{a} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{a} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Δείξτε ότι $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$

β) Υπολογίστε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$ ώστε $(k\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{a} + 3\vec{\beta})$

γ) Να αναλύσετε το $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{a}$.

4.40 Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ώστε $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

α) Υπολογίστε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Υπολογίστε το $|\vec{\gamma}|$

γ) Βρείτε αν υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε $(\vec{a} + k\vec{\beta}) \cdot (2\vec{a} - k\vec{\beta}) = 17$.

4.41 Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{a} + 2\vec{\beta}| = |3\vec{a} - \vec{\beta}|$

α) Δείξτε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2$

β) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε $|k\vec{a} + 3\vec{\beta}| = |3\vec{a} + 2k\vec{\beta}|$

γ) Βρείτε τη γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{a} + \vec{\beta}$.