

Μάθημα 01

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: **β' Λυκείου κατεύθυνσης**

Ημερομηνία

12/09/2025

βασικές έννοιες διανυσμάτων

1.1 Ορισμός, αρχή και πέρας διανύσματος

Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** και το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B συμβολίζεται $\overrightarrow{AB}$.

Μερικές φορές ένα διάνυσμα συμβολίζεται και με ένα μικρό γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου επιγραφόμενο με ένα βέλος, για παράδειγμα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$.

Ένα διάνυσμα του οποίου τα άκρα (η αρχή και το πέρας) συμπίπτουν λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Έτσι για παράδειγμα είναι $AA = \vec{0}$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$$

1.2 Φορέας ενός διανύσματος

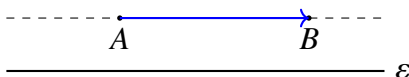
Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ονομάζεται **φορέας** του διανύσματος αυτού.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος AA μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το A .



1.3 Παραλληλία διανύσματος και ευθείας

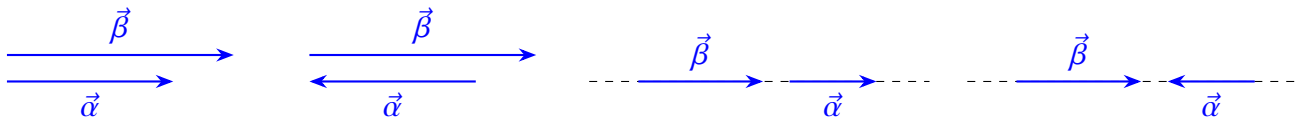
Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ θα λέγεται **παράλληλο** προς μια ευθεία ε , αν ο φορέας του $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με την ε . Γράφουμε τότε $\overrightarrow{AB} // \varepsilon$.



1.4 Παράλληλα (συγγραμμικά) διανύσματα

Δύο διανύσματα θα λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Για να δηλώσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι παράλληλα, γράφουμε $\vec{a} // \vec{b}$.

- Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ θεωρείται παράλληλο προς κάθε άλλο διάνυσμα.

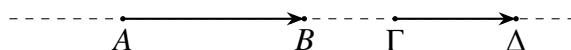


Σε καθένα από τα παραπάνω σχήματα ισχύει $\vec{a} // \vec{b}$, είτε έχουν παράλληλους φορείς, είτε βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την **ίδια διεύθυνση**.

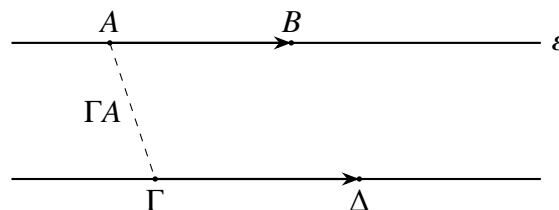
1.5 Ομόρροπα – Αντίρροπα διανύσματα

Έστω τα παράλληλα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.

- Αν τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν τον ίδιο φορέα, τότε θα ονομάζονται **ομόρροπα**, αν μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη.



- Αν τα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν διαφορετικούς φορείς, τότε θα ονομάζονται **ομόρροπα**, αν οι ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την ευθεία ΓA που διέρχεται από τις αρχές τους.



Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι ομόρροπα, ονομάζονται **αντίρροπα**. Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ θεωρείται ομόρροπο (και αντίρροπο) προς κάθε άλλο διάνυσμα.

- Για να δηλώσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα, γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$. Αντίστοιχα, αν τα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα, γράφουμε $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$.

Σχόλια

- Αν δύο διανύσματα είναι ομόρροπα, λέμε επίσης ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση**.
- Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta} \text{ ή } \vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$.

1.6 Μέτρο διανύσματος

Έστω διάνυσμα $\vec{a} = \vec{AB}$. Η απόσταση των άκρων του AB (δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB) ονομάζεται **μέτρο** (ή **μήκος**) του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.

Είναι δηλαδή $|\vec{AB}| = (AB) \geq 0$.

Ισχύει επίσης $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{BA}$, ενώ δεν είναι ίσα (είναι αντίθετα), έχουν όμως ίσα μέτρα, διότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και BA έχουν το ίδιο μήκος (αφού συμπίπτουν).

1.7 Μοναδιαίο διάνυσμα

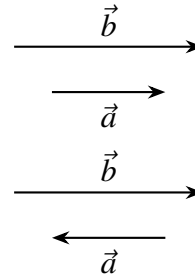
Ένα διάνυσμα ονομάζεται **μοναδιαίο**, αν έχει μέτρο (μήκος) ίσο με 1. Είναι δηλαδή

$$\vec{a} \text{ μοναδιαίο} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 1$$

1.8 Ίσα – Αντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται:

- **ίσα**, όταν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα,
- **αντίθετα**, όταν είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα.



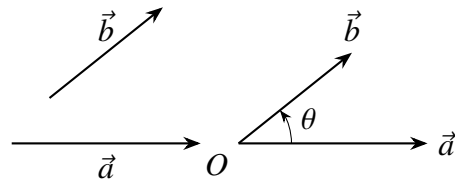
- Για να δηλώσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ίσα γράφουμε $\vec{a} = \vec{b}$.
- Για να δηλώσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι αντίθετα γράφουμε $\vec{a} = -\vec{b}$.
- Ισχύει πάντα $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

1.9 Γωνία δύο διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$. Παίρνουμε τα $\vec{a}, \vec{b}$ με κοινή αρχή και έστω $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$.

Η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ (που έχει ως πλευρές τις ημιευθείες OA, OB):

- είναι ανεξάρτητη του σημείου O ,
- ονομάζεται **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$** ,
- συμβολίζεται με $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.



- Στην περίπτωση που $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε ως γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$ μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε γωνία θ με $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

Ιδιότητες

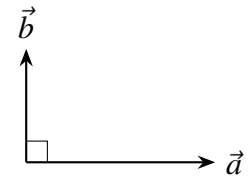
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

Αν επιπλέον ισχύουν $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0^\circ \Leftrightarrow \cos \theta = 1$
- $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 180^\circ \Leftrightarrow \cos \theta = -1$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 90^\circ \text{ ή } 270^\circ \Leftrightarrow \cos \theta = 0$

1.10 Ορθογώνια (κάθετα) διανύσματα

• Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ονομάζονται **ορθογώνια** (ή **κάθετα**), όταν η γωνία τους θ είναι ίση με 90° (δηλαδή όταν οι φορείς τους είναι κάθετες ευθείες). Συμβολίζουμε τότε $\vec{a} \perp \vec{b}$. Ισχύει λοιπόν $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 90^\circ \Leftrightarrow \sin\theta = 0$.



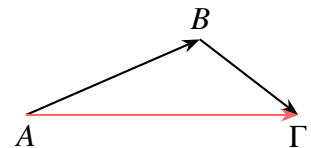
• Στην περίπτωση που $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$ (δηλαδή: το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται κάθετο προς κάθε άλλο διάνυσμα).

1.11 Πρόσθεση διανυσμάτων

α' τρόπος (κανόνας πρόσθεσης διαδοχικών διανυσμάτων)

Αν στο διάνυσμα $\vec{AB}$ «κολλήσουμε» το $\vec{B\Gamma}$, τότε το άθροισμα είναι το $\vec{A\Gamma}$:

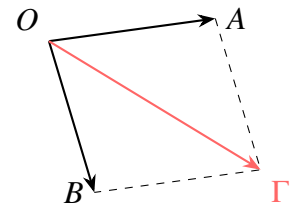
$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}.$$



β' τρόπος (κανόνας παραλληλογράμμου – πρόσθεση δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή)

Αν $\vec{a} = \vec{OA}$ και $\vec{b} = \vec{OB}$, τότε το άθροισμα είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου $OAGB$:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OG}, \quad \text{όπου } OAGB \text{ παραλληλόγραμμο.}$$



Σχόλιο Ο α' τρόπος μπορεί να εφαρμοστεί και για την πρόσθεση περισσότερων από δύο διανυσμάτων, για παράδειγμα

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}.$$

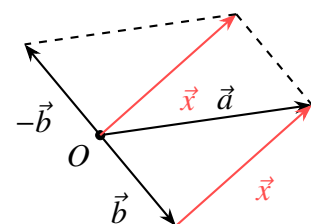
Ιδιότητες

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (αντιμεταθετική)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (προσεταιριστική)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

1.12 Αφαίρεση διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{a} - \vec{b}$ (που διαβάζεται *διαφορά του $\vec{b}$ από το $\vec{a}$*) ορίζεται ως το άθροισμα $\vec{a} + (-\vec{b})$ του $\vec{a}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{b}$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}.$$

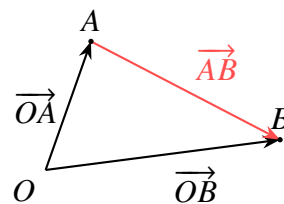


Σχόλιο: Η διαφορά του $\vec{a}$ από το $\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\vec{b} - \vec{a}$ (δηλαδή $\vec{b} + (-\vec{a})$).

1.13 Σημείο αναφοράς – Διάνυσμα θέσεως

Αν O είναι σημείο του χώρου (σημείο αναφοράς), τότε το διάνυσμα $\vec{OA}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσεως** του σημείου A ή **διανυσματική ακτίνα** του A . Για κάθε διάνυσμα $\vec{AB}$ ισχύει

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$



Δηλαδή κάθε διάνυσμα ισούται με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής. Ο παραπάνω τύπος:

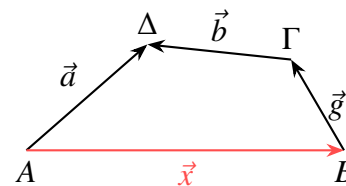
- εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο ένα οποιοδήποτε διάνυσμα γράφεται ως διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή ένα (επιθυμητό) σημείο O ,
- αν διαβαστεί από το δεύτερο μέλος προς το πρώτο $(\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB})$, μας δείχνει πώς γίνεται η αφαίρεση δύο διανυσμάτων, τα οποία έχουν κοινή αρχή.

1.14 Άσκηση

Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των υπολοίπων διανυσμάτων του διπλανού σχήματος.

ΛΥΣΗ:

Το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{AB}$ έχει αρχή το A και πέρας το B . Ξεκινάμε από το A και κινούμενοι κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής $A\Delta\Gamma B$ καταλήγουμε στο B . Διανύουμε έτσι τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ και ΓB . Επειδή $A\Delta = \vec{a}$, $\Delta\Gamma = -\vec{b}$ και $\Gamma B = -\vec{g}$, συμπεραίνουμε ότι $\vec{x} = A\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma B = \vec{a} - \vec{b} - \vec{g}$.



1.15 Άσκηση

Αν $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι:

- $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ (εναλλαγή των «μέσων» γραμμιάτων),
- $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ (εναλλαγή των «άκρων» γραμμιάτων).

ΛΥΣΗ

- Από την υπόθεση $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, έχουμε $\vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta}$.
- Από την υπόθεση $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$, έχουμε $\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma}$.

1.16 (Μέθοδος των διανυσματικών ακτίνων)

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ και D ισχύει

$$\vec{AD} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{BD}. \quad (I)$$

ΛΥΣΗ**α' τρόπος**

Έστω O ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο. Αναλύοντας (γράφοντας) κάθε διάνυσμα ως διαφορά δύο διανυσμάτων που έχουν κοινή αρχή το O (σύμφωνα με την ισότητα $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$), η σχέση (I) διαδοχικά γράφεται: $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$, που ισχύει.

β' τρόπος

Ενεργούμε όπως στον α' τρόπο, μόνο που δεν θεωρούμε κάποιο νέο σημείο O , αλλά χρησιμοποιούμε αντί του O ένα από τα υπάρχοντα σημεία, για παράδειγμα το A . Έτσι η σχέση γράφεται:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}, \text{ που ισχύει.}$$

γ' τρόπος

Μετακινούμε όρους στην ισότητα (I) από το ένα μέλος στο άλλο έτσι, ώστε να προκύψουν διαφορές διανυσμάτων με κοινή αρχή (ή αθροίσματα διαδοχικών διανυσμάτων). Έχουμε:

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{ID}, \text{ το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει.}$$

1.17

Αν ισχύει $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται ($A \equiv B$).

ΛΥΣΗ:**α' τρόπος**

Γράφοντας κάθε διάνυσμα ως διαφορά δύο διανυσμάτων με αρχή το N , έχουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NA} &= \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{NA} \end{aligned}$$

άρα το A ταυτίζεται με το B .

Σημείωση: Σημεία που ταυτίζονται

Για να δείξουμε ότι δύο σημεία A και B ταυτίζονται ($A \equiv B$), αρκεί να δείξουμε ότι για ένα οποιοδήποτε σημείο N του επιπέδου, τα διανύσματα $\overrightarrow{NA}$ και $\overrightarrow{NB}$ είναι ίσα, ή ισοδύναμα ότι $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB}$.

β' τρόπος

Γράφοντας κάθε διάνυσμα ως διαφορά δύο διανυσμάτων με αρχή το N , έχουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

άρα το A ταυτίζεται με το B .

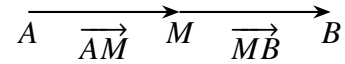
Σημείωση: Σημεία που ταυτίζονται

Για να δείξουμε ότι δύο σημεία A και B ταυτίζονται ($A \equiv B$), αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή ότι $\vec{AB} = \vec{0}$ ή ισοδύναμα ότι $\vec{BA} = \vec{0}$.

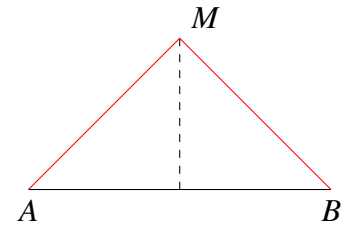
1.18 Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

Ένα σημείο M είναι **μέσο** ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , αν και μόνο αν ισχύει η (διανυσματική) ισότητα

$$\vec{AM} = \vec{MB}.$$



Σχόλιο Αν ισχύει απλώς $AM = MB$ (ισότητα μηκών και όχι ισότητα διανυσμάτων), δεν προκύπτει κατ' ανάγκην ότι το M είναι μέσο του τμήματος AB . Η σχέση $\vec{AM} = \vec{MB}$ μας πληροφορεί απλά ότι το M ισαπέχει από τα A και B , οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος AB .

**1.19**

Αν ισχύει $\vec{AN} - \vec{GM} = \vec{MB} + \vec{GN}$, να αποδείξετε ότι το G είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

ΛΥΣΗ:

Γράφοντας αρχικά κάθε διάνυσμα ως διαφορά δύο διανυσμάτων με αρχή το G , έχουμε:

$$\vec{GN} - \vec{GM} = \vec{GB} - \vec{GM} + \vec{GN} - \vec{GM} \Leftrightarrow -\vec{GA} = \vec{GB}$$

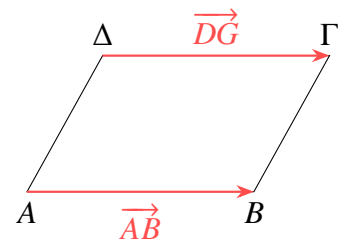
άρα το G είναι μέσο του AB .

1.20

Έστω $ABGD$ ένα τετράπλευρο. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει η διανυσματική ισότητα (ισότητα διανυσμάτων) $\vec{AB} = \vec{DG}$, τότε το $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΛΥΣΗ:

Από τη σχέση $\vec{AB} = \vec{DG}$ προκύπτει ότι $|AB| = |DG|$ και $AB \parallel DG$, οπότε $(AB) = (DG)$ και $AB \parallel DG$. Άρα το τετράπλευρο $ABGD$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

**1.21**

Έστω ότι για τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και D ισχύει $\vec{KD} = \vec{BA} + \vec{K\Gamma}$. (1). Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο ($AB\Gamma D \#$).

ΛΥΣΗ:**Σημείωση: Παραλληλόγραμμο**

Έστω A, B, Γ, D τέσσερα μη συνευθειακά σημεία. Τότε ισχύει

$$AB\Gamma D\# \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\Gamma}, \text{ κλπ.}$$

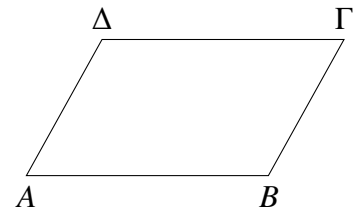
Αρχικά γράφοντας κάθε διάνυσμα στη σχέση (1) ως διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, για παράδειγμα το A , έχουμε:

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{K\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\Gamma}$$



Επομένως το $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο.

Σχόλιο Από μόνη της η σχέση $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D\Gamma}$, δεν δίνει αυτόματα ότι $AB\Gamma D\#$, διότι είναι δυνατόν τα σημεία A, B, Γ, D να είναι συνευθειακά. Πρέπει να γνωρίζουμε ότι τα σημεία A, B, Γ, D δεν είναι συνευθειακά, για να συμπεράνουμε ότι το $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο.

1.22

Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma D$ και έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{g}, \vec{d}$ τα διανύσματα θέσεως σημείων A, B, Γ, D αντίστοιχα ως προς ένα σημείο O . Τι συμπεραίνετε για το τετράπλευρο $AB\Gamma D$, αν είναι γνωστό ότι:

$$(1) \vec{a} + \vec{g} = \vec{b} + \vec{d} \quad (2) |\vec{a} - \vec{g}| = |\vec{b} - \vec{d}| \quad (3) \vec{a} + \vec{g} = \vec{b} + \vec{d} \text{ και } |\vec{a} - \vec{g}| = |\vec{b} - \vec{d}|$$

ΛΥΣΗ:

Αρχικά θα ισχύουν $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{g} = \overrightarrow{O\Gamma}$ και $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$.

ι) Η σχέση $\vec{a} + \vec{g} = \vec{b} + \vec{d}$ γράφεται: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D\Gamma}$.

Επομένως το $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο.

ιι) Η σχέση $|\vec{a} - \vec{g}| = |\vec{b} - \vec{d}|$ γράφεται: $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{GA}| = |\overrightarrow{DB}|$, που σημαίνει ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma D$ έχει ίσες διαγωνίους.

ιιι) Από το πρώτο (ι) και το δεύτερο (ιι) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma D$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους, δηλαδή είναι ορθογώνιο.